研究ノート

歴史の教訓に学ぶということ

—森島・関防衛論争に関連して—

甲斐原一朗

はじめに

“もしもあのとき……”はしばしばいわれる論議であり，素人であるわれわれが歴史に興味をおぼえる場面でもある。ほぼ1年間におよんだ森島通夫・関嘉彦両氏の防衛論争も，このことを1つの軸として展開されている。(論争の経過は添付資料参照)

論争のつねとして，十分にかみあった論議とはいえないが，“歴史の教訓から学ばないことは愚かである”ということは，両氏に共通の認識である。しかし“学び方”については，関氏の“歴史的可能性についての思惟実験”と，森島氏の“歴史（事実）観察”との対立があり，ことによれば，歴史自体についての考え方にも大きな開きがあるとも思える。関氏は“歴史は宿命的に進行するのではなく，いくつかの選択の可能性をもつのである”から，当時の人に開けていた可能性を考えて，“選ばれたコースとは異なるコースを選択しえたとすれば，どのような結果が生じたであろうかをできる限り客観的に推論し，それを現在の意志決定の参考ないし，指針とすることができる”という。関氏のこの考え方について森島氏は，“彼は可能性という架空の事態から教訓をえているのであって，歴史的に生じた事実から学んでいるのではない。……自分をも含めて社会科学者とくに経済学者はそういう分析をしがちであるが，こういう歴史からの学び方は，よほど注意深く行わないと，人を迷せ誤導することになるか，勝手な子供だましの教訓をうるだけになってしまう”と反論する。コー

スの選択は合理的でなければならないが，歴史は必ずしも合理的ではなく，非合理的な要素が重要な役割を果しているから，関氏の方法では現実を完全に解明することはできず，子供だましの教訓をうるだけになってしまう。この弱点を克服する唯一つの方法は歴史観察で補完することで，起った歴史に何の変更も加えず，ありのままの歴史から教訓をひきださねばならない。もちろん事実から学んだものは一般性をもちえないが，それでも注意深く学べば，将来のための有用な指針をうることができるという。

ところで歴史が一面において宿命的，あるいは決定論的に進行するということも両者に共通の認識であろう。これを否定しては“歴史の教訓から学ぶ”ことは不可能であろう。たとえばある国の各地点における社会状態が政治的 (x_1)，経済的 (x_2) および地理的要因 (x_3) で定まるとする。x_1, x_2, x_3 の間には権力の中枢である首都に従属し，傾斜した形ではあろうが，ある自律的な関係が成立しているであろう。そしてこの自律的関係を維持しながら，時間 (t) の経過にともなって x_1, x_2, x_3 は少しずつ変化し，したがって各地点の社会状態も変えていく。数学的に表現すれば

$$(1)\quad \begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ dx_3/dt &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

なる連立微分方程式で定義される自律系が与えられているのである。自律系 (1) の解，すなわち連立方程式の解とは

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) \\ x_1 &= y_2(t) \\ x_3 &= \varphi_3(t) \end{aligned}$$

という1組の t の関数で，これらを (1) へ代入したとき，(1) が t の恒等式となるようなようなものである。t にいろいろな値を与えたときの x_1, x_2, x_3 を3次元の座標空間にドットすれば，1つの曲線がえられ，これは“積分曲線”とよばれる。積分曲線はその地点での社会状態の推移，すなわち歴史のグラフだといえる。しかし社会状態，歴史については，x_1, x_2, x_3 ほど有力ではないが，

小さな影響を及ぼす他の要因も作用するであろうし，ときには偶然もあるだろう。その結果，(1)の自律系が壊れ，(2)の解が変り，したがって積分曲線と歴史の推移も，厳密にみれば少し変るであろう。しかし首都に従属し，傾斜する関係は不変であり，したがって自律系も積分曲線も，大筋においては不変だともいえる。要約していえば，歴史の推移は局所的にはつねに変化しているが，大局的には不変だといえる。ついで隣国と戦争状態に入ったとすれば，局所的変化は強まるであろうが，首都が安定である限り，なお大局的には不変だといえよう。しかし首都が陥落するや，権力の中枢が変って，積分曲線あるいは歴史の推移は大局的にも全く異なったものとなる。つまり歴史の推移には局所的と大局的の2つがあり，歴史研究において局所的変化と大局的変化のいずれに重点をおくかが問題となるのである。

この論争の理解においても，それぞれの論点で両氏がいずれに重点をおいているかに留意する必要がある。

〔A〕 ニュートンからポアンカレへ

近代科学者は事象を記述する場合，数学的なモデルを作るという手法を使う。とくに運動や推移を記述するには，(1)式のような微分方程式体系から成るモデルが使われる。そしてモデルがうまくいった場合には，事象が記述されたというだけでなく，説明できたということになり，さらにそのモデルが比較的簡単な等式に集約できれば，それは法則とよばれてよいものとなる。

ここ300年間で，こうしたモデルが最も成功したのはニュートン力学であった。彼のモデルは海王星の発見等天文学の多くの問題を解決した。ニュートンの決定論，さらには近代科学のメタファーとして，“ラプラスの悪魔”がいわれ，この悪魔に初期条件を告げれば，未来は全てわかるとされた。しかしやがて二つの問題で魔力の限界が露わにされた。一つは天体力学における“三体問題”であり，いま一つは運動が分子・原子のレベルになれば，魔力はもはや通じなかったのである。無限の力をもつと思われたラプラスの悪魔が解決したのは，実は力学，天文学，電気磁気学，光学の範囲で，その成功もよくみれば，現象を

非常に簡単化していたし，簡単化できる現象に限られていたのである。複雑で簡単化できない現象を対象とする生物学や経済学は，非精密科学として埒外におかれた。これらの困難を解決する一つの方法として，力学と統計学との結合が考えられた。運動の平均の態様を記述・説明する統計力学・量子力学がそれである。端的にいえば，決定論的モデルから確率論的モデルへの移行である。ここでは生物学，経済学も登場可能である。その現象を支配していると考えられる少数の要因をとって，現象と要因を結ぶ方程式（力学系）を作る。ただし多くの要因が省略されているので，現象は方程式通りには実現しない。そのためいわゆる誤差が生ずるとして，上の方程式（厳密方程式）に誤差項を付した方程式が用いられる。計量経済モデルもその一つであるが，決定論的モデルから確率論的モデルへ移ることで問題は解決されたであろうか。むしろ統計学への堕落にすぎないとする見解がある。数学者H. ポアンカレはその一人で，彼は微分方程式の基本的理解からはじめる。それまでの微分方程式研究は，具体的に解の形を求める努力を中心としていた。その中には解析的にあらわされた解または厳密解を求めること，および近似的にしても解の形を明にする努力が含まれていた。しかし複雑な条件に支配される運動・現象を正確な微分方程式にかき下せるかどうかは疑問である。よしんばかき下せたとしても，その厳密解が求まるとは限らない。さらに解があったとしても，初期条件が少し変れば，解は全く形を変えることもある。だとすれば，正確な微分方程式を作ったり，その厳密な解を求める努力は馬鹿げている。重要なことは，それらの解の全ての集合（族）に関する情報をうることである。すなわち与えられた一つの積分曲線と，そのすぐ傍——近傍——を通る積分曲線との関係を知ることこそが重要ではないか。これがポアンカレの主張であった。定量的理論から定性的理論への転換ともいえようが，正確にいえば，運動・現象の局所的理解から大局的理解への転換である。

計量経済モデルについてもほぼ同じことがいえる。外生変数を操作して将来予想を行うが，予想は必ずしも正確ではない。モデルの不安定性も否定できない。関氏の思惟実験を批判して，森島氏が“自分をも含めて社会科学者とくに

経済学者は……”といっているのは，このことを指摘し，コースの選択，すなわち外生変数の操作が危険であることを警告しているのであろうか。

ポアンカレの主張にしたがって，トポロジーなる数学が誕生する。ポアンカレの主張は1880年代であるが，一世紀たらずの間にそれは急速な発展をとげている。トポロジーが規定する空間には距離・長さという概念はなく，点とその近傍という概念しかない。点がつながっているかどうか，あるいは連続か非連続かの区別しかない。したがってトポロジストは専ら質的な差異だけを取扱うといえる。

歴史は必らずしも宿命的には進行せず，複雑な要因，あるいは偶然もあって“歴史的な事件”すなわち歴史の不連続がおこる。これらの歴史を，一例としてではなく，本質的に理解しようとすれば，歴史空間における連続と不連続およびその連結を，局所的に，また大局的に観察・理解しなければならない。そのためにはトポロジストにしたがって若干の数学的準備が必要である。

〔B〕 微分方程式からベクトル場へ

ポアンカレの主張にしたがってニュートンをこえる最初のステップは，自律系としての微分方程式体系を“イラスト化”することである。(1) 式で示したように自律系は一階の微分方程式体系で表わせる。もし高階の微分たとえば d^2x_1/dt^2 が含まれれば，も一つの変数 x_4 をふやして，$x_4=dx_1/dt, d^2x_1/dt^2=dx_4/dt$ とすれば，自律系はいつでも1階の微分でかけることとなる。したがって (1) 式から出発することとする。

要因 x_1, x_2, x_3 に対応する直交3軸を与えれば，3次元空間 R^3 が定まる。x_1, x_2, x_3 を空間 R^3 の点の座標，t を時刻と考えれば，(2) 式は R^3 内に1つの曲線を描く。他方 (1) 式からつぎのことがわかる。R^3 内に任意の1点 P をとり，その座標を (p_1, p_2, p_3) とすると，(1) 式の右辺から3個の数（関数ではない）$f_1(p_1, p_2, p_3)$，$f_2(p_1, p_2, p_3)$ および $f_3(p_1, p_2, p_3)$ が定まる。この3個の数を1組の数とみれば，R^3 内の1つの点が定まる。そこで R^3 内に P を始点とし，いま求めた点を結ぶと，方向と長さの定まった直線，すなわち“ベ

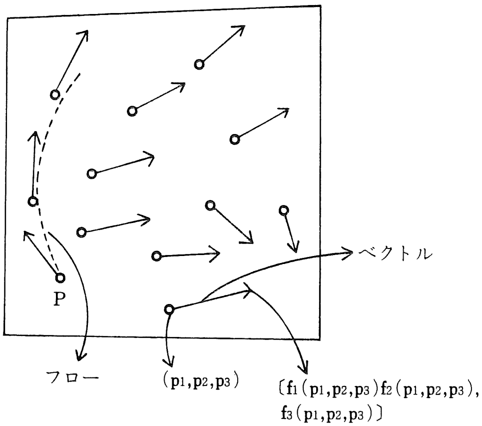

図　1

クトル” $X(p_1, p_2, p_3)$ が描かれる。R^3 内の全ての点でこの操作を行うと，結局 R^3 全体に (1) 式の自律系に支配されたベクトルがバラまかれることとなる（図1参照)。このことを R^3 上に“ベクトル場”

$$X(x_1, x_2, x_3) = [f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)]$$

が定義されたという。すなわち自律系 (1) 式が与えられたということは，右辺の関係式を成分にもったベクトル場が与えられたということと同じなのである。

つぎに (2) 式において $t=0$ とおいたときの解 $x_1=p_1$, $x_2=p_2$, $x_3=p_3$ を座標とする点 P をとり，P におけるベクトルに接し，隣接するベクトルに次々に接する1本の曲線をひく（図1参照)。この曲線の接線を引けば当然曲線上の全ての点で，自律系 (1) を満足することとなる。したがってこの曲線は，初期条件 (p_1, p_2, p_3) から出発した点 P が R^3 内を運動したときの道筋で，“軌道”あるいは“フロー”とよばれる。歴史空間でいえば，ある初期条件から出発し，ある自律系に支配されて，宿命的・決定論的に推移した歴史の過程なのである。P 点以外の各点についても1つずつフローが対応し，R^3 はこれらのフローの群で埋めつくされ，しかもどのフローもベクトル場に接しているのである。結局 (1) 式を与えることは，(1) 式で定まるベクトル場 X を R^3 上で

与えることであり，(1) 式の解 (2) 式を求めることは，R^3 上にバラまかれたベクトル達に接するような曲線・フローの群をさがすことと同じである。

上記のことは，要因数の多い $n>3$ の n 次元空間にそのまま拡張できて，一般にベクトル場 X と，それをのせている空間（位相空間とよばれる）を組にして (M, X) とかき，それを“力学系”とよぶこととする。

つぎに少し特殊なベクトル場を考えることとする。まず M の上に一価関数 $f{:}M\to R$ を考える。とくに f として各地点 (x) における標高関数をとれば，関数値 $f(x)$ は高さとなり，f のグラフは地形を表わすこととなる。（図2参照）地形との類比として，M 上のベクトル $x(x_1, x_2, x_3)$ に対する関数値が同じ値 u をとる点 $f(x)=u$ が定義されるが，この式は空間における面の方程式で“等ポテンシャル面”とよばれる。u の値に u_1，u_2，……を与えれば，それぞれの等ポテンシャル面がえられる。任意の点 P を通る等ポテンシャル u 面と，これに隣接する等ポテンシャル面 $u+\Delta u$ およびその上の点 Q を考える（図3参照）。曲線 PQ 上のポテンシャルの変化率 $\Delta u/PM$ は，接線 PM 上の変化率に等しく，さらに PM 上の変化率は法線 PN 上の変化率の正射影となっている。すなわち法線 PN 上の変化率が最大で，その大きさは

$$\nabla=(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3)$$

である。$+\nabla$ を考えて，結局点 P に方向が法線方向で，大きさ $-\nabla$ のベクトルが定義される。これは“勾配ベクトル”といわれるが，全ての点について勾

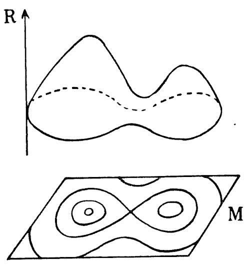

図　2

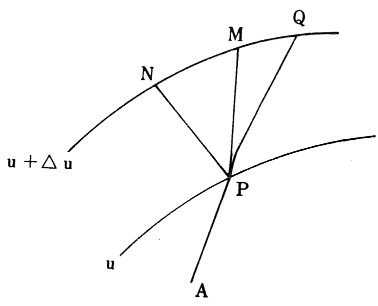

図　3

配ベクトルが定義され，前と同じくベクトル場 X が定義される。これをとくに“勾配ベクトル場”，そのフローを“勾配フロー”といい，勾配ベクトル場を作った関数 f を“ポテンシャル関数”という。地形との類比でいえば，山に降った雨水は地形の最大勾配線に沿って流れだすが，その雨水の径路が上記の勾配フローである。後にみるように，勾配ベクトル場は取扱いの容易なベクトル場であるから，とくに留意することとしたい。

〔C〕 特異点と特異性

ベクトル場には沢山のフローがあって，それはいろいろな“模様”(phase portrait) を作っている。力学系 ($M. X$) を大局的に，あるいは定性的にみるという場合，“位相型”という概念がある。2つの力学系 ($M. X$) と ($M. Y$) について，それぞれのフェーズ・ポートレートが“同相写像”(ゴム膜に描いた図柄を伸したり，縮めたり連続的に変形することを考えればよい。) によって，フローの方向まで一致するように，全く重ねあわせることができるとき，これら2つの力学系は“同じ位相型”をもつといわれる。そして位相型を問題とする場合，ベクトル場の特別な点，すなわち“特異点”が重要な手掛りとなる。

勾配ベクトル場としての地形でいえば，くぼ地の最低点が1つの特異点で，そこでは勾配はゼロで，その点の近くから出発するフローは，全てその特異点に漸近していく。この特異点は“アトラクタ”とよばれる。現象がいったんアトラクタに近いものとなると，すこし位の違いがあっても，十分時間が経過すれば，全て同じ状態に到達する。これは初期条件が少し違っても，結果として生じる終局状態が同じになるので，初期条件に関し“安定性”があるといわれる。歴史の推移には初期条件によって若干の相違はあるが，終局的には宿命的な結果に落付くということに対比できよう。それぞれのアトラクタに対し，そのアトラクタに吸引される点から成る集合が考えられるが，この集合をアトラクタの“鉢”という。くぼ地の場合であれば，この谷底に向う斜面，この点の方に向う川の流域全体が鉢である。尾根にあたる線で鉢が区分されるように，勾配ベクトル場の場合，全空間はいくつかの鉢に分割される。

山の頂上はいま1つの特異点で，状態を表わす点 x が頂上にあれば，この状態は数学的には持続するが，現実にはたえず小さな攪乱要因が働いて，x は少しではあるが移動する。そして頂上から少しでもはずれると，フローに従ってずっと遠くに運れてもとの頂上にもどることはできない。このような特異点は，初期条件に関し“不安定”な特異点で，“リペラー”とよばれる。またリペラーの点で，状態 x が右にはずれるか，左にはずれるかで鉢が異なり，到達するアトラクタは全く異なることとなる。ポアンカレがいったように，初期条件が少し違えば解の形が全く変わるというのはこのことである。峠の点もこれとは違うがいま1つの不安定な特異点で，“サドル”といわれる。

ベクトル場が勾配ベクトル場でない場合には，鉢の分割が不可能であったり，非常に複雑に入りくんだりして，たちいった考察は難しいが，数学的にはつぎのように表現される。簡単のため2次元空間を考えて，自律系を

$$dx_1/dt=f_1(x_1, x_2)$$
$$dx_2/dt=f_2(x_1, x_2)$$

とする。ただし座標が適当に変換されていて，$f_1(0,0)=0$，$f_2(0,0)=0$ すなわち原点が特異点になっているとする。ヤコビ行列

$$J=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{bmatrix}$$

の固有値を λ_1, λ_2 とする。(i) λ_1, λ_2 がともに実数で，$\lambda_2>\lambda_1>0$ であれば，全てのフローは原点に向い，原点はアトラクタである。(“安定結節点”といわれる。) (ii) $0>\lambda_2>\lambda_1$ であれば，フローの方向が逆となり，原点はリペラー（または“不安定結節点”）である。(iii) $\lambda_1<0<\lambda_2$ であれば2組の双曲線のようなフローで，2つの特別な方向がある。一方は原点に近づくものであり，他は原点から遠ざかるもので，原点はサドルである。(iv) λ_1, λ_2 が共役複素数であれば，“渦巻き”のフローとなる。同じことが関数についても考えられる。

簡単のため原点を通る1変数関数 $f: R\to R$ あるいは $y=f(x)$ を考える。

(i) $y=x^2$ とすれば，原点において $dy/dx=0$ で原点は特異点であるが2階

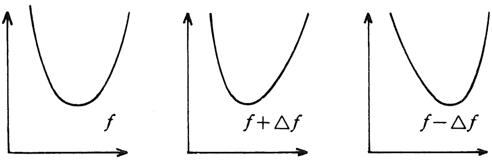

図　4

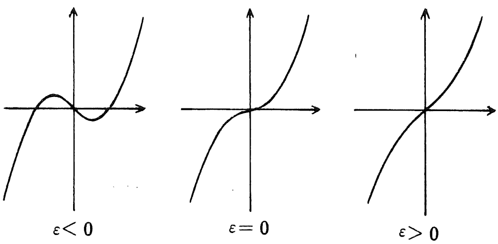

図　5

微分 d^2y/dx^2 は2となり，$d^2y/dx^2 \neq 0$ である。f に $\pm\Delta f$ なる小さ変動があったとする。特異点の位置や，特異点における関数値（“臨界値”という）は少し変るかもしれないが，もとの特異点の近くに1つだけ2階微分が0でないような特異点が残り，これらは座標を適当に変換すれば，互いに重ねあわせることができる。すなわち同じ位相型で，安定な特異点であり（図4参照），その近傍で座標を適当りとりなすことによって

$$f(x)=x^2 \quad \text{または} \quad f(x)=-x^2$$

の標準形になすことができる。

(ii) $y=x^3$ であれば，原点が特異点で，2階微分 d^2y/dx_2 は $6x$ となり，特異点（原点）においてゼロである。$f(x)$ に小さな変動 Δf があったとし，$(f+\Delta f)(x)$ を考える。たとえば $\Delta f(x)=\varepsilon x$ とすれば，$g(x)=(f+\Delta f)(x)=x^3+\varepsilon x$ において

(i) $\varepsilon>0$ のとき，$dg/dx=3x^2+\varepsilon\neq 0$ で，特異点はない。

(ii) $\varepsilon<0$ のとき，$dg/dx=3x^2-\varepsilon$ で，$x=\sqrt{\varepsilon/3}$ および $x=-\sqrt{1/3}$ の2つの特異点をもつこととなる。すなわち f と（$f+\Delta f$）のグラフは全く異なり，

どのような座標変換によっても重ねあわせることはできない。（図5参照）3つのグラフは位相型を異にするので，$f(x)=x^3$ なる関数の $x=0$ の特異点（特異性）は“不安定”である。なおこのとき $d^2f/dx^2=6x$ で，特異点 $x=0$ において $d^2f/dx^2=0$ であり，2階微分がゼロであることが，特異点の不安定性の1つの条件である。

〔D〕 カタストロフ論への招待

関数，ベクトル場などの数学的対象が連続的に変形していくとき，ある点で，その定性的性質が突然に変化すること，数学的には位相型が変化することがあるのは前述のごとくである。この現象は“分岐現象”とよばれるが，ここで分岐の“起り方”のパターンと，その条件を明らかにし，一般化しておく必要がある。

内生変数 x と，外生変数として時間のパラメタ t との2変数関数

$$f: R\times R\to R$$
$$f=f(x, t)$$

を考える。f は2変数関数であるが，パラメタ t をとめるごとに，x に関する1変数の関数とみることができ，その関数は

$$f_t: R\to R$$
$$f_t=f(x, t)$$

と定義される。パラメタのおのおのの値 t に対して1つの関数が対応しているので，f_t は t によってパラメータづけられた関数の“族”である。前節との関連で，関数の族

$$f_t(x)=\frac{1}{3}x^3-tx$$

を考える。(i) $t<0$ のときは，前述の通り f_t は特異点をもたない関数である。(ii) $t>0$ であれば，$x=\pm\sqrt{t}$ の2点で1階微分が0となり特異点である。($x=-\sqrt{t}$ では極大値 $x=\sqrt{t}$ では極小値となっている。）しかもこの点にお

ける2階微分はゼロでないから，これらの界異点は安定な特異点である。したがって $t>0$ で f_t は構造安定である。要約していえば，$t<0$ の範囲内ではつねに1つの位相型で，途中で位相型が変更することはない。また $t>0$ なる全てのt に対して，それに対応する f_t は同じ位相型をもっている。そして $t<0$ に対する位相型と，$t>0$ に対する位相型とは異なっている。（前者では特異点がなく，後者では2つの特異点がある）つまり $t=0$ をこえると，これまでなかった特異点が突然2つ出現する。このことを $t=0$ で分岐またはカタストロフがあらわれたといい，歴史でいえば，$t=0$ で大事件が発生したのである。

時間軸を T, x 軸を X とかき，f の値を R 軸上にかけば，f のグラフは3次元空間 $T\times X\times R$ の中の曲面となる。(図6参照) パラメタ t のそれぞれの値に対して特異点を求め，それを $T\times X$ 内の点として考えれば，$T\times X$ 内に1つの曲線がかける。(図7参照) この曲線は $\partial f/\partial x=0$ すなわち方程式 $x^2-t=0$ で定まる放物線である。この放物線を上からみると，曲線を分岐をおこしている点 $x=0$ で折り曲げた形になっている。その意味でこれを“折り目”の分岐・カタストロフという。(曲線の上半分は f_t の極小点，下半分は極大点に対応している)

ところで現実には内生変数の数は多いであろうし，さらに次数も3以上の高次となるであろう。したがってこれらに対応して，特異点の安定・非安定の条件を一般化しておく必要がある。原点を通る関数

$$f: R^n \to R$$

$$f=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

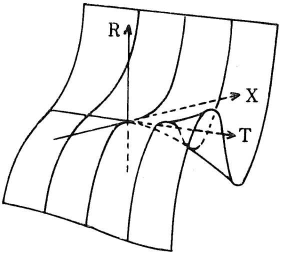

図　6

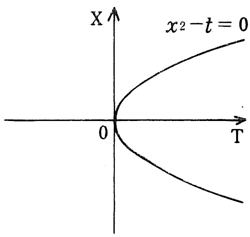

図　7

が原点を特異点にもつ（すなわち $\partial f/\partial x_1=0,\ \partial f/\partial x_2=0, \cdots\cdots,\ \partial f/\partial x_n=0$）として，$f$ の“ヘッス行列”

$$H(f)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$$

を作る。このとき

(i)　特異点(原点）におけるヘッス行列の行列 $H(f)$ 式の階数[註1]が n であれば，この特異点は“非退化特異点”といわれ，f は安定である。したがって f の近くにある関数は全て f と位相的に同型で，分岐・カタストロフはおこらない。

(ii)　同じく行列式の階数が（$n-1$）以下のとき，この特異点(原点）は“退化特異点”といわれ，不安定である。したがって f の近傍に必らず f と位相的に異なる関数 g が存在し，f から g への分岐・カタストロフがおこる。

さらに高次関数となれば，複数個の特異点が存在するが，この場合，第二の型として“競合”の分岐・カタストロフがおこる。たとえば関数の族

$$f_t=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+tx$$

を考える。

$$\partial f_t/\partial x=x^3-3x+t=0$$

は (i) $t<-2$ のとき，$x>1$ の範囲に実根を1つだけもつ。(ii) t$=-2$ のとき $x=-1$ が重根となり，ここで前述の折り目のカタストロフが生じている。(iii) $-2<t<2$ のとき，3つの相異なる実根をもつ。(iv) $t=2$ のとき，$x=1$ において折り目のカタストロフが生じている。

とくに $-2<t<2$ に留意すれば，この範囲では1つの極大点と2つの極小点が存在している。(図8参照）2つの極小点を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とする）とすれば，$-2<t<0$ の範囲では α における臨界値が β における臨界値よりも大きいが，

$0<t<2$ ではその逆になっている。そして $t=0$ において2つの臨界値は一致している。2つの極小点における臨界値の大小関係が逆転しておれば，それらは異なった位相型をもつこととなる。すなわち2つの臨界値が等しい $t=0$ で位相型が変化しているのであって，2つの特異点の臨界値が等しければ大域的に関数は不安定的である。そして2つの極小点が最小点になろうとして競いあっているようにみえるので，“競合”の分岐・カタストロフといわれる。

要約していえば，退化特異点をもつか，または2つ以上の臨界値が等しい場合，分岐・カタストロフがおこるのである。

ベクトル場についても分岐・カタストロフが定義される。構造安定なベクトル場から，位相型の異なるもう1つの構造安定なベクトル場に連続的に変形していけば，その途中のどこかで分岐がおこる。最も簡単なパターンは“サドル・ノード”とよばれ，サドルとアトラクタがくっつくことによっておこる分岐である。(図9参照) 図aでは特異点が3つ――AとCがアトラクタ，Bはサドル――あり，点線は鉢の境界である。このベクトル場が連続的に変形していけば，B とCがくっついて B' となる。B' は特別な特異点で，上半分がサドル，下半分でアトラクタとなっているので“サドル・ノード”とよばれる。さらに

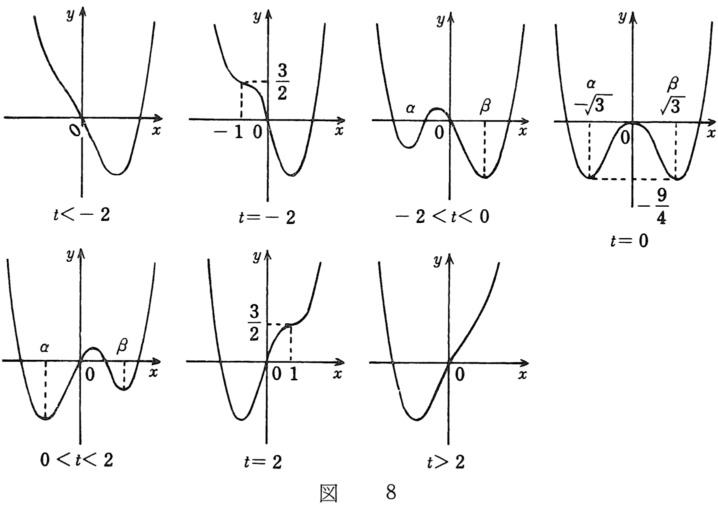

図　8

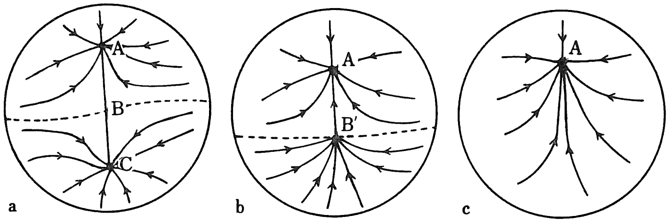

図　9

この変形が進むと図Cになるが，ここではサドル・ノードが消えて，アトラクタはA 1つとなっている。つまりアトラクタAがサドル・ノードを通じて，アトラクタBの支配する鉢を吸収してしまうのである。冒頭にあげた隣国による侵略の例がこれである。Aの侵略により国境は押しやられるが，Bの支配する鉢はなお維持される。しかし首都Bが占領されるや，つぎの瞬間にBの鉢が消えるというカタストロフがおこるのである。

さらにいま1つ，渦状点から安定な周期軌道が生みだされる“ホップの分岐”があるが，ここでは省略する。

〔E〕 トムの定理

現象を数学的対象である関数やベクトル場に対比させ，現象の推移・歴史をそれらの連続的変形と考える。さらに関数やベクトル場の連続的変形の中であらわれる数学的意味での分岐・カタストロフを現象における質的変動に対応するものとみなす。そして分岐・カタストロフの様子を探り，それがいかにおこるか，どのようなパターンがあるかについての知識によって，現象・歴史の推移を大局的に理解できるのではないか。関数やベクトルの1つ1つについての局所的理解は，現象が少し複雑になれば困難であり，むしろ馬鹿げたことで，大局的理解を重視すべしというのがポアンカレの主張であった。

そのためにまず関数を要素とする“関数空間”およびベクトル場を要素とする“力学系空間”を考える。まず関数空間についていえばつぎのごとくである。k 次元の空間と k 個の変数をもつなめらかな（何回でも微分できる）関数を

考える。この関数は R^k から R への写像で，無数に存在する。これらを全て集めた集合を“k 変数のなめらかな関数が作る関数空間”とよび

$$C^\infty(R^k, R)$$

とかくこととする。

つぎにベクトル場についても，たとえば2次元のベクトル場 $X=[f_1(x, y), f_2(x, y)]$ は，1つのなめらかな R^2 から R^2 への写像と考えられるので，関数の場合と同じく，力学系空間が定義できる。

ところで関数空間または力学型空間は，構造安定な要素（関数またはベクトル）と構造不安定な要素とから構成されているのであるが，このうち構造不安定な要素から作られる部分集合を“分岐・カタストロフ集合”とよび Σ であらわされる。集合 Σ の分類，解析が1つの課題となる。他方現象の推移を理解するためには，現象を写しとるモデルが必要となる。それは現象が観察される空間，時間軸または時空間から関数空間へのなめらかな写像か，または力学型空間へのなめらかな写像で，前者を“静モデル”，後者を“代謝モデル”という。

現象における質的変動は，この写像によって対応づけられた関数またはベクトル場の分岐に類比されるのであるから，モデルの写像が Σ に対していかに交わるかが，第二の課題なのである。しかし分岐集合 Σ は非常に複雑な形をした部分集合であり，そのためモデルの写像の態様によって交り方はいくらでも複雑なものとなりうる。

数学者ルネ・トム（R. Thom）は若干の条件を考慮した静的モデルを設定して，限定された範囲内ではあるが，上述の交わり方のうちでいくつかの本質的なパターンを分類することに成功している。トムのモデルはつぎの条件をみたす組（M, C, F, m）である。

(i) M は n 次元空間 R^n（正確には C^∞ 級の n 次元多様体）で，“内部状態の空間”とよばれる。M の点は $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で示される。

(ii) C は k 次元 R^k の領域で，“外部変数の空間”または“コントロール空間”とよばれる。C の点は $C=(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ で示される。

(iii) 関数 $F: M\times C\to R$ はなめらかな（C^∞ 級の）ポテンシャル関数である。

そしてこのモデルはいつも F の極小値へ向って動くと仮定する。つまり C の各点 C で写像

$$F_c : R^n \to R$$

を，M の任意の点 x に対して

$$F_c(x) = F(x, C)$$

として定めると，F_c を点 C におけるポテンシャルという。この F_c から M 上の勾配ベクトル場が定まり，モデルはその勾配に沿って F_c の極小値に対応する点 x_c に向って進むのである。

(iv)　コントロール空間の点 C が与えられたとき，関数は一般にいくつかの極小値をとる。この極小値のどれが点 C に対応するかを定める規約 m があるが，これには2つの型がある。(a) マクスウェルの規約：極小値の中の最小のもの，すなわち最小値を与える M の点 x を C に対応する状態とする。物理・化学的現象に適用する規約であるが，小さい側の2つの極小値が同じ値となるような点でカタストロフがおこる。(b) 遅れの規約：極小値 $F(x, C)$ を与える x のうち，どれを点 C に対応する状態とするかは，それまでの“履歴”で定まる。すなわち点 C' に対して x' が状態をあらわしていたときに，C' の近くの点 C では，$F(x', C')$ に最も近い極小値 $F(x, C)$ を与える x が状態を示すのである。この場合，極小値の個数が変化するような点 C でカタストロフがおこる。社会科学的現象は，一般にこれに従う。

このモデルにおいて，(iv) の規約は個々の場合に応じて与えるものとして規約の問題を省いて考えると，トムのモデルは結局ポテンシャル関数

$$V : M \times C \to R$$

で表わされるが，パラメタづき関数

$$F : M \to R$$

$$V_C(x) = F(x) = V(x, C)$$

で定義されるポテンシャル関数 $F(x)$ の検討が課題である。

$F(x)$ が原点を特異点にもつとする。F のヘッス行列 $H(F)$ の原点におけ

る行列式の階級が n のとき，原点は“非退化特異点”とよばれ，このときモースの定理註2により F は，原点の近傍で座標を適当に選ぶと

$$F(x_1, \cdots, x_n) = x_1{}^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 \cdots\cdots\cdots x_n^2$$

とかける。この F は構造安定であるから，F の近くにある関数は全て F と位相的に同じであり，分岐・カタストロフはおこらない。

つぎにヘッス行列 $H(F)$ の原点における行列式の階数が $(n-1)$ 以下であれば，原点は“退化特異点”である。このとき F のどんな近くにも F と位相的に異なる関数 G が存在するのであるが，F と位相的に異なる関数の個数を“余次元”［Codim(F)］という。余次元は関数の“自由度”と考えられるが，自由度が余り大きくなると，分岐とカタストロフはきわめて複雑となるので，トムは $4 \geqq \mathrm{Codim}\,(F)$ に限定して議論を進めている。

関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ が原点で退化特異点をもっているとすれば，$\partial F/\partial x_1(0) = 0, \cdots\ \partial F/\partial x_n(0) = 0$ で，テーラー展開により

$$F(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_1, \cdots, x_n) + (\text{3次以上の項})$$

とあらわされる。ただし $Q(x_1, \cdots, x_n)$ は2次の同次式である。また原点の近傍を考えているので（3次以上の項）は省略できて，点原が退化特異点であるから，Q のヘッス行列 $H(Q)$ の原点における行列式の階数は $(n-1)$ 以下である。いま $H(Q)$ の階数が $(n-k)$ であれば，モースの定理から，R^n の座標を適当にとると

$$(3)\quad F(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=k+1}^{n} \pm x_i{}^2\right) + Z(x_1, \cdots, x_k)$$

とあらわせる。上式の $(\sum \pm x_i{}^2)$ は構造安定であるから，結局 $Z(x_1, \cdots, x_k)$ の部分が構造不安定になる部分である。ところで $H(Q)$ の階数が $(n-k)$ ということは，$H(Q)$ が対称行列であるから，$\dfrac{k(k+1)}{2}$ 個の座標がゼロになっていることであり，関数 F はゼロになった座標の個数だけ自由度をもつ。われわれは4以下の自由度（余次元）を考えているのであるから

$$4 \geq \mathrm{Codim}\,(F) \geq \frac{k(k+1)}{2}$$

となり，$k=1$ また $k=2$ でなければならない。したがって関数 F は

$$(4)\quad F(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2) + Z(x_1)$$

または

$$(4')\quad F(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2) + Z(x_1, x_2)$$

の2通りしかないこととなる。したがって $F(x_1, \cdots, x_n)$ の分岐・カタストロフを分類するには，1変数関数 $Z(x_1)$ と2変数関数 $Z(x_1, x_2)$ を分類すればよい。ただし社会科学的現象の場合には一般に1変数関数であるから，ここでは $Z(x_1)$ のみを考えることとする。(生物の形態変化等の場合は2変数関数となることがある。) ここで $4 < \mathrm{Codim}(Z)$ が鍵となるが，マルグランジュ・マザーの定理により

$$\mathrm{Codim}(Z) = \dim_{\mathrm{R}} \frac{C_0^\infty(R^n, R)}{(\partial Z/\partial x_1, \cdots, \partial Z/\partial x_n)}$$

により計算される。ここでは Z は1変数関数であるから

$$\mathrm{codim}(Z) = \dim_{\mathrm{R}} \frac{C_0^\infty(R, R)}{(dZ/dx)}$$

である。この式の意味は，まず $x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ という無限列を考えたとき，関数 $Z(x)$ の微分 dZ/dx に表われる項を含む項を全てゼロとおいたとき，生き残る項の個数が $\mathrm{Codim}(Z)$ であるということである。たとえば $Z(x)=x^m$ の $\mathrm{Codim}(Z)$ はつぎのごとくである。(この場合の x^m を“中心”という。) $dZ/dx = m \cdot x^{m-1}$ であるから，無限列 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ のうち x^{m-1} を含む項を全てゼロとおく。すなわち $x^{m-1}=0$, $x^m = x \cdot x^{m-1} = 0$, $x^{m+1} = x^2 \cdot x^{m-1} = 0 \cdots\cdots$ となり，生き残るのは $x, x^2, \cdots, x^{m-2}$ の $(m-2)$ 個になる。したがって $\mathrm{Codim}(Z) = m-2$ である。さらにマザーの定理は，このとき

$$(5)\quad \Phi(x, c_1, \cdots, c_{m-2}) = x^m + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m-2} x^{m-2}$$

〔ただし，$x=(x_1, \cdots, x_n)$，また $c_1, \cdots, c_{m-2}$ は実数〕なる新しい関数が存在することを示している。この関数 Φ は $Z(x)=x^m$ を中心とする“普遍開折”また

は“普遍展開”といわれ，右辺のパラメタを少し変えると，中心 $Z(x)=x^m$ になったり，その近傍にある別の関数になったりする。これらの関数は空間を折りたたんだりするためできる“しわ”であり，$\varPhi$ はちょうどそのしわをもとにもどし，折り目のない空間にする関数である。分岐・カタストロフのパターンを分類するには，普遍解折を数えあげればよく，トムは余次元4以下の範囲内で，$\varPhi$ の個数を数えあげるのである。

$$4\geq \mathrm{Codim}(Z)=m-2$$

であるから，$m\leq 6$ となる。したがって $Z(x)=x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$ であり，対応するそれぞれの普遍開折は（5）式から求められる。

以上を要約して，トムの定理はつぎのように述べられる。

定理：安定した静的モデル F: $R^n\times R^k\to R$ は $k<4$ の場合，下記の標準型のどれか1つと同値である。ここで R^n の点は $x=(x_1, \cdots, x_n)$ であり，R^k の点は $c_1, (c_1, c_2), \cdots, (c_1, c_2, c_3, c_4)$ などで示される。また $Q(x_2, \cdots, x_n)$ は2次形式 $\sum\pm x_i{}^2$ である。

中心	標　準　型　F	コントロール空間の次元 (h)
x	x_1	0
x^2	$Q(x_1, x_n)$	0
x^3	$x_1{}^3+c_1x_1+Q(x_2, \cdots, x_n)$	1
x^4	$\pm x_1{}^4+c_1x_1{}^2+c_2x_1+Q(x_2, \cdots, x_n)$	2
x^5	$x_1{}^5+c_1x_1{}^3+c_2x_1{}^2\times c_3x_1+Q(x_2, \cdots, x_n)$	3
x^6	$\pm x_1{}^6+c_1x_1{}^4+c_2x_1{}^3+c_3x_1{}^2+c_4x_1+Q(x_2, \cdots, x_n)$	4
	〔他に2変数関数に関する3個の型があるが省略する〕	

上表で，中心 x および x^2 ではカタストロフがおこらず，また $Q(x_2, \cdots, x_n)$ はカタストロフに無関係である。これら不必要な変数を省いて，本質的にカタストロフに関連した部分のみを示せば，つぎの表がえられる。

以上はトムのカタストロフの“分類定理”とよばれるが，その意味はつぎのごとくである。

いま4個以下のコントロール（外部変数）をもつポテンシャル関数の定った

コントロールの数	ポテンシャル関数	名　称
1	$\dfrac{x^3}{3}+c_1x$	折り目
2	$\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{c_1}{2}x^2+c_2x$	くさび
3	$\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{c_1}{3}x^3+\dfrac{c_2}{2}x^2+c_3x^3$	つばめの尾
4	$\dfrac{5}{6}x^6+\dfrac{c_1}{4}x^4+\dfrac{c_2}{3}x^3+\dfrac{c_3}{2}x^2+c_4x$	蝶々

あるシステムを仮定する。このシステムは遅れの規約にしたがって，ポテンシャルが極小値をとるような状態を示すとする。このようなシステムは現実には無数にあろうが，任意の1つのシステムでおこりうるカタストロフは，状態を示す変数を適当にとって x とすれば，局所的には（つまりカタストロフがおこる点の近傍では），上表で示したようなポテンシャル関数をもつシステムでおこるカタストロフのどれか1つと同じ様相を示すというのである。

つまりどのような複雑なシステムであっても（上記の条件を満している限り），そのシステムでおこるカタストロフのパターンは4つしかないとトムはいうのであって，彼は後にみるようにパターンを図形化して，“くさび”“つばめの尾”等の名前をつけているのである。

〔F〕 歴史的必然とクレオド

特定時点における社会の状態は前述のごとく，経済，政治等一般に n 個の内生変数を要素とする n 次元ベクトル場に類比される。トムはとくに勾配ベクトル場に限定し，それを規定するポテンシャル関数を定義する。そしてポテンシャル関数の極小値を与える変数の点が状態を示すとするのである。つづいてこれらベクトル場またはポテンシャル関数の集合としてベクトル場空間または関数空間が定義される。他方“歴史”を時間とともに変る状態の連続的変化だと考えれば，ある国あるいはある状態の歴史を，“時間軸”からベクトル場または関数空間への写像とみなすことができる。つまりベクトル場またはポテンシャ

ル関数という点が，ベクトル場・関数空間の中を時間の経過とともに，連続的に移動していく過程が歴史にほかならないのである。したがって歴史は，ベクトル・関数空間内に描かれた1本の弧であるといえる。

安定した状態が一定期間継続するということは，歴史の弧が空間内の，いわゆる“構造安定”なベクトル場あるいはポテンシャル関数から成る領域を通過しつつあることを意味する。もちろん時間の経過とともに，ベクトル場のフェーズ・ポートレイトは若干変るが，大局的には不変であり，また関数の極小値は若干変るがその個数は変らない。その意味で歴史はなめらかに経過しているのである。しかしやがてある時点で，フェーズ・ポートレイトは大局的にも一変し，極小値の個数も変って，大局的にも異なる状態があらわれる。そしてこの新しい状態は一定期間安定的に継続する。つまり歴史の弧は空間内の新しい構造安定なものから成る領域を通過するのである。これら新旧2つの構造安定な領域の境界線上にあるものが“構造不安定”なベクトル場，あるいはポテンシャル関数なのである。歴史の弧がこの構造不安定なベクトル場・ポテンシャル関数を通過する瞬間に，“歴史的大事件”がおこって歴史は激変する。したがって歴史を大局的に理解する鍵は，構造不安定なベクトル場またはポテンシャル関数の集合（分岐・カタストロフ集合）が，空間内にどういう形で埋込まれているか，またこの集合を横切るとき，ベクトル場と関数の大局的状況がどう変容するかの問題にある。ただしベクトル場の変容，すなわち代謝モデルを取扱うことは，現在のところ不可能である。

トムの功績は，関数空間，すなわち静モデルについて，しかも限定された範囲においてではあるが，この難問を明確に解いたことである。要約していえば，現象・歴史の具体的内容がなんであれ，またそれを規定する要因，変数がいくつあろうとも，外的要因の数が4以下であれば，もしその現象・歴史にカタストロフがおこるとすれば（必らずカタストロフがおこるというのではない。）そのカタストロフの型は（全ての現象・歴史を通じて）ごく少数の統一的・標準的パターン（くさび，ツバメの尾等）のどれかに限定されると，トムは主張するのである。

ところでこの問題に関連して，いま1つ“横断性”の問題がある。歴史の弧が分岐集合と横断的に交わるか，どうかの問題である。トムのモデルでは広い範囲で横断性が成立する。ポテンシャル関数を $F(x_1, \cdots, x_n; c_1, \cdots, c_k)$ とすれば，それぞれのパラメタ $C=(c_1, \cdots, c_k)$ に対する特異点が $\partial F/\partial x_1=0, \cdots, \partial F/\partial x_n=0$ から定まる。この特異点を全ての $C_1, \cdots, C_2$ について集めれば，$n\times k$ 次元の曲面 S' がえられる。状態はポテンシャル関数の極小値で与えられるから，上の曲面 S' から $\partial^2F/\partial x_1{}^2<0, \cdots, \partial^2F/\partial x_n<0$ となる部分を切りとった残りが，状態を示す曲面 S である。歴史は状態空間 S の上の弧であり，分岐集合は上の切り口である。したがって歴史の弧は広い部分で分岐集合と横断的に交わり，カタストロフがおこる。図7でいえば，S' は放物線であり，これから極大値を与える放物線の下半分を切取った残り，すなわち上半分が状態を示す曲線であり，その切口の点0が分岐集合となる。

コントロール空間の次元が高くなると，当然分岐集合は複雑となる。たとえばパラメタを c_1, c_2 とすると，曲面 S' は1枚の紙を中央で S 字状に折り曲げてできる曲面であり，これから斜線の部分を切りとった部分が状態曲面 S となる。(図10参照) 歴史の弧 c は分岐集合に交わらないが，弧aおよびbは分岐集合と横断的に交わることとなる。これらを見やすくするため，全体をコントロール空間上に射影すると下図がえられる。ここでは分岐集合がくさびの形となってあらわれるので，トムはこれを“くさび”のカタストロフと名付けたのである。

ところで歴史はくりかえさないが，いくつかの国の歴史が同じような弧を描くことはありうる。ここで“歴史の必然”がいわれる。しかし国の歴史を規定する要因は数多くあり，微小な要因が少しでも違えば，歴史の弧は僅かとはいえ異なるのである。

簡単のため，状態曲面が2次元平面であるとする。歴史はこの平面に描かれた弧である。この平面におけるカタストロフ集合が，ただ1個の点だけから成っていたとする。このとき歴史の弧がたまたまこの点にぶっつかって，歴史的事件がおこるのは単なる偶然で，歴史的必然とはいえない。歴史の弧がほんの

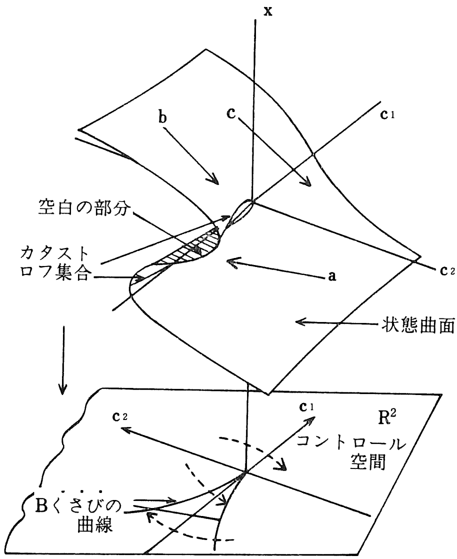

図 10　コントロール空間は状態曲面と交っているが，見やすくするため，コントロール空間をシフトしてある。

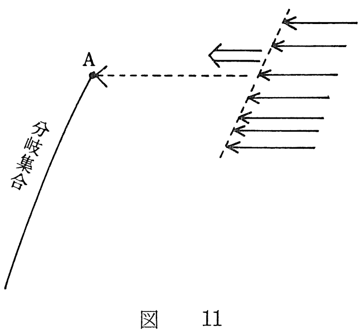

図　11

少しでもズレていたとすれば，この点にぶっつかることもなく，カタストロフもおこりえなかったはずだからである。(図11参照)

つぎにカタストロフ集合が状態平面の曲線，たとえば平面内を上下に走る1本の直線であったとする。この直線を境にして左右で状態は大局的に異なって

いる。歴史が右から左へ進行するとする。要因の多少の差によって歴史の弧は少しずつズレているであろうが，大局的に同じ道筋をたどっておれば，多くの弧が一様に分岐集合にぶっつかって，左側の状態へ歴史は激変するであろう。この場合の歴史的事件の生起は“必然的”とみることができる。

ここでカタストロフ集合が１つの点の場合にかえろう。状態が少しずつ異なっている無限に多くの国があったとする。これらの国々はそれぞれに歴史の弧を描くが，それは全体として１つの曲面が描かれる。曲面であれば，分岐集合が点であっても必らず交わる。すなわち１国の歴史を考えた場合には，偶然にしかおこりえなかった事件が，こんどは無限個のいずれかの国で必らず生起することとなる。そして“どこかの国で生起する”という法則は，全体としての歴史の流れが，多少異なっても不変だという意味で，必然であるといえる。

このように歴史的必然性には，オーダーの違いがあると考えられる。第一に，出発点や途中の外的条件に多少の差があっても，必らずおこるという意味での必然性。第二に，いずれかのところで必らずおこるという意味での必然性。第三に，以上のいずれの必然にもあたらない純粋な偶然に区分される。このことを横断性との関連でいえば，分岐集合に横断的に交りうる歴史の曲面の中の最低次元の曲面の次元数の問題だといえる。すなわち第一の必然性では，１本の歴史の弧でも横断的に交りうるという意味で次元数は１。第二の必然性では，歴史の弧の集団としての平面を考えてはじめて横断的に交わりうるという意味で次元数は２。つまり第一の場合は次元数１の必然性，第二の場合は次元数２の必然性というように，歴史的必然性を指標化できるのである。

ところで次元１の歴史的事件も，内容的にはさまざまのものがある。そしてこれらの事件のそれぞれがバラバラに生起するのではなく，いくつかの事件が一まとまりになって継起するのが通常である。たとえば革命というカタストロフは単発的に生起するのではなく，その前後にいくつかの必然的事件が継起的に生起すると考えられる。つまり複数個のカタストロフがひとかたまりになって，全体として必然的に並んでいる。トムはこういう歴史の道筋を“必然的な道”という意味で，“クレオド”と名付けている。

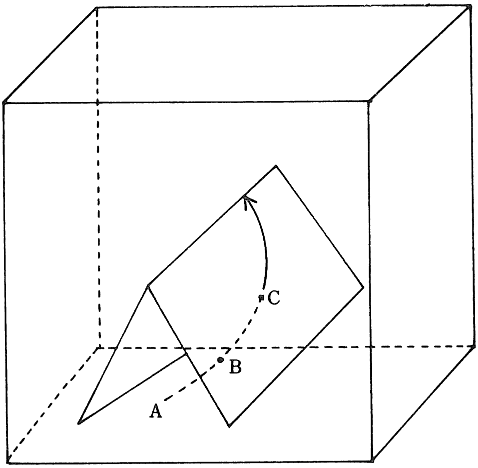

図　12

クレオドの構造は余次元1の分岐集合の配置にかかわっており，多面体の頂点でいくつかの面が接合しているように，余次元1の分岐集合が，余次元のヨリ高い分岐集合に接合しているのである。いくつかの事件が継起的におこるというのは，歴史の弧が余次元の高い分起集合の近傍を通過していることを意味している。

余次元1の分岐集合の配置を具体的にイメージするには，1枚の紙を2つに折り，それを本を開くように広げて，空間の中にセットする。(図12参照) 2枚の頁が余次元1の分岐集合で，それが余次元2の分岐集合である折り目のところで接合する形となっている。前述の遅れの規約を考慮すれば，紙を少しズラして折ればよい。上述の指標化により，歴史の道，クレオドを分類し，さらに比較することも可能となるのである。

歴史の空間は多数の要因から成るきわめて高次の空間であるが，歴史の質的変化，歴史的事件の生起に視野を限定すれば，空間の中に埋めこまれた前述の紙のような低次元の空間にだけ注目すればよい。この空間の数学的表現が前述の“普遍開折”であり，折り目に対応するのが，普遍開折の“中心”である。

森島氏が“起こった歴史”に何の変更も加えず，ありのままの“歴史観察”と

いう場合，十分明確ではないが，クレオドの概念が意識されているとみてよいのではあるまいか。もちろん歴史的事件が継起的におこる過程を一般的・標準的なパターンに分類できるとは理解していないであろう。しかし歴史観察を“注意深く行えば”将来のための指針となるような歴史の必然的な傾向を見いだすことができるというのが森島氏の見解である。

他方関氏は“歴史は宿命的に進行するとは限らない”として，歴史についての“思惟実験”を主張する。森島氏が“経済学者がよくするように……”というように，ここでは歴史の過程の局所的理解が問題とされているのであろうか。そうだとすれば，ポアンカレが指摘した問題があり，森島氏がいうように，実験の結果は“世を迷わすもの”となりかねない。また余次元1のカタストロフの接合の中をどう通りぬけるかの実験であれば，選択の幅は狭く，“子供だまし”の実験となる危険もあろう。

〔G〕 二つの防衛論—戦争のカタストロフ

森島氏の“ソフト・ウェア論”と関氏の“核シェルター論”と，両氏の日本防衛論の対立はきびしい。この対立の背景には，第二次大戦の経過から学んだ“教訓”の違いがあること，さらには戦争一般についてのモデルの差があることはいうまでもない。ここでは防衛論そのものではなく，トムのモデルを媒介として，両氏のモデルの違いを明らかにすることとする。

トムのモデルを戦争に適用する場合，コントロール空間の座標軸を特定しなければならない。ただし特定化された座標の上で，静的モデル $F: M\times C\to R$ は安定していなければならないのであるが，安定の意味はつぎのように説明できる。いま現象 Φ に対応する静的モデルを F とする。そのとき少し違う現象 Φ'(Φ の摂動 F') に対応する静的モデル F' を考えたとき，F と F' が同値でなければならないのである。たとえば戦争のモデルを定義するためには，多数の戦争 Φ, Φ'……を対象とするのであるが，F と F' が同値であるためには，Φ, Φ'……が質的には同じ型の戦争であること，つまり Φ, Φ'……は同値関係になければならない。この意味で戦争を分類するとすれば，大国が小国を侵

略する“侵略戦争”と，他国からの脅威に対抗する“防衛戦争”に区分することは妥当であろう。

森島氏は“ヒトラーがいた限り…… 攻撃はさけられなかった”というように，彼は侵略戦争の論理を展開したといえる。また戦争政策は，侵略による“効用”と，戦争に要する“コスト”との“均衡”によって定まるという場合，彼の戦争論はトムのくさびのカタストロフを基本とするものといえる。すなわち c_1＝効用（c_1 が増加すれば，戦意が高まるという意味で，c_1 は“平常要因”とよばれる。），c_2＝コスト（戦争にともなうコストの増加は戦意を低下させるという意味で，c_2 は，“分裂要因”とよばれる。）とすれば，ハト派からタカ派に至る戦争政策 X のカタストロフは図13のように描かれる。簡単に説明すれば

(i) くさびの左外側の点 X_1 では，隣国からの脅威もなく（c_1 がマイナス）X の極小値は1つで，ハト派政策におちつく。(ii) 脅威が徐々に増加し（コントロール面を右に進んで）点 X_2 に達すると，これまでの極小値の左側に第二

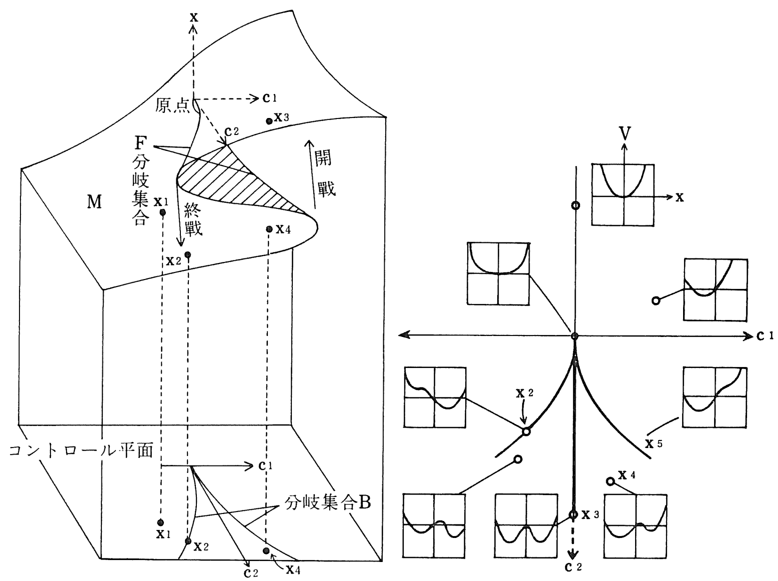

図　13

の極小値が現われる。脅威の増大にともなってタカ派的思考が生まれたのである。(iii) さらに脅威が増大すれば(右側にさらに進んで),第二の極小値が成長し,くさびの中央線上の点 X_3 では2つの極小値は等しくなる。脅威の増加により,ハト派とタカ派的思考が同勢力となる。(極大値が1つあらわれるが,前述のように切取られていて無関係である。) (iv) 中央線をこえてさらに右に進むと,点 X_4 では左側の極小値,すなわちタカ派的思考が優勢となるが,なお隠忍自重がつづく。(遅れの規約に従っているのである。) (v) 右側のくさびをこえると,右側の極小値は消えて,タカ派的思考が支配する。戦争政策は上方の部分にジャンプして,戦争となる。

戦争の歴史も条件の違いにより少しずつ異なると考えねばならないが,くさびのモデルから,つぎのような戦争のパターンが分類できる。(図14参照)

(i) 資源も豊富ないわゆる大国が(図①),他国からの脅威を徐々に強くうけて(イ),それがつづくとタカ派的思考が強まり,戦争政策は曲面の右上方へ移る。この場合,局所的に次第に変るのであって,カタストロフなしの開戦である。それが次第にエスカレートし(ロ),戦費も増加し,(ハ),なんらかの理由で脅威が減少するとハト派的思考が生まれる(ニ),しかし戦争はなお継続し,A点ではじめてカタストロフィックに撤退し,戦費も減少する(ホ)。

(ii) それほど大きくない国が同じく他国からの脅威をうけると(図の②),戦費の問題があるが,脅威の増大とともに戦費は増加する(イ)。ハト派とタカ派の対立があこるが(ロ),さらに脅威が増加した点Bで,カタストロフィックな開戦となる。

(iii) 小国が他国の脅威をうけたとして(図の③)戦費をまかなえないとして,ハト派的思考がとられた。(イ)(ロ)しかしたとえば第三国からの武器援助があったため,とても戦わないと思っていた他国を尻目に点Bでカタストロフィックに戦いをはじめる。“驚威の反転”といわれる。

(iv) ほぼ同じ条件にあり,お互いに脅威を感じあっている2国がある(図の④⑤)両国は高い戦費を払って軍備をはじめるが,戦費が増加して両国ともハト派とタカ派が対立する。両国は初めは類似の状態であったが,一国④は初め

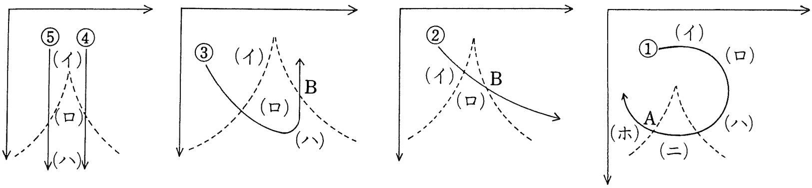

図　14

にくさびの右側にあったので，結果として次第にタカ派的となり，曲面の上の部分を進むが，他国⑤ははじめくさびの左側にあったので，結局ハト派的で，曲面の下半分をいくこととなるのである。結局戦争にはならない。（“分散”といわれる。）

他方関氏は，戦争政策は専らコストに依存するとし，トムのモデルでいえば，“折り目”のカタストロフが基本となる。すなわち相手国の軍事力が大きく，戦争のコストが増大すれば，ハト派が優勢となって，やがて戦意は消滅するのである。（図7参照）また侵略・防衛戦争の区分は余り明確でなく，したがって戦争指導者としてのヒトラーについても特別な評価はない。

両氏の間でまず，ヒトラーがなぜスイスを攻撃しなかったかが論争されている。関氏はスイスの地形と，とくに民兵組織をもっていたから，スイス攻撃のコストが大きく，それがヒトラーに攻撃を断念させたのだという。森島氏は，スイスは中立国であり，したがってこれを侵略してえられる効用はない。タカ派的思考の平常要因が作用しないところでは，地形条件や民兵組織の存在とは無関係に戦争はないと主張する。

さらに関氏は，スイスが中立国であったからだという森島説に対し，“同じく中立国であったベルギーは侵略されたではないか”と反論する。しかしヒトラーのその後の行動からいえば，ベルギー占領の戦術的効用は大きいはずだと森島氏はいう。

ところで現代の戦争では，両当事国間の対応だけではなく，第三国の干渉が強く影響すると考えねばならない。両氏がイギリスおよびアメリカを問題にするのはその意味においてであろう。トムのモデルでは第三のコントロール要因

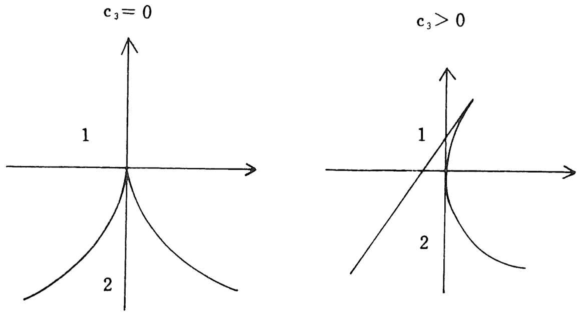

図　15

c_3 が加わった“ツバメの尾”のカタストロフとなる。この場合，コントロール空間が3次元となり，それへの投影は複雑で，視覚的には c_3 軸に沿って切断した断面で示すこととなる。(図15参照) c_3 が弱い段階 ($c_3=0$) では再びくさびのカタストロフが現われる。前述の低い余次元が接合する一例であるが，4次元空間内のくさびであるから，その角度は大きくなっている。c_3 が大きくなれば，くさびは右上に引上げられて変形する。その意味で，c_3 は“バイアス要因”といわれる。バイアスが急激であれば，全空間に衝撃を与えて引裂くことにもなりかねず，鋭いツバメの尾が空気を切裂くことに類比して“ツバメの尾”のカタストロフといわれる。引裂かれることなく推移すれば，第四の要因 c_4 が登場する。その結果くさびが枝をだして分岐をはじめる。(図16参照) c_4 がさらにつづくと，分枝は徐々に成長し，左右2つのくさびとなる。その形が羽を

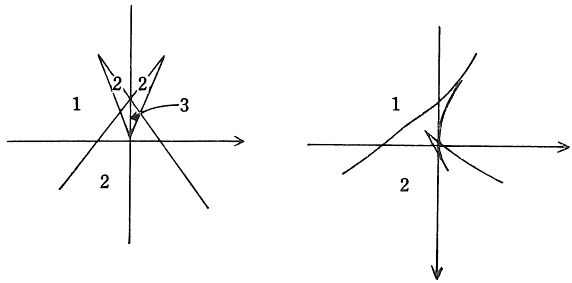

図　16

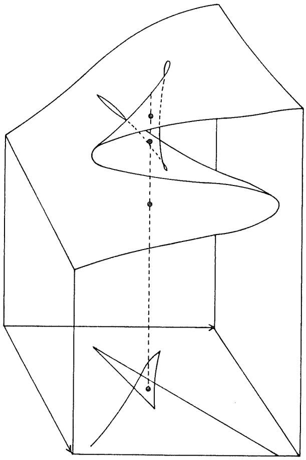

図　17

ひろげた蝶に類比されて，“蝶々”のカタストロフとよばれる。これには極小値が3個存在するという重要な特徴がある。すなわちコントロール空間の真中にあるダイヤモンド型の部分にある点に対応して有効な極小値が存在して，合計3個の極小値が存在するのである。全空間を図示すれば（図17参照），ダイヤモンド型の部分に対応する袋ができて，上部の状態曲面からつりさがったポケットができるのである。

つぎに戦争について，c_3 および c_4 軸を特定する問題がある。c_3 についてまず“不可犯性”という概念がある。典型的には工業国は都市を空襲されて壊滅する危険が大きいので不可犯性が小さく，逆に農業国はゲリラの可能性があるので不可犯性が大きいと考えられる。また国際世論を背景に中立国は不可犯性が大きいと思われる。不可犯性が大きいと，くさびは右上に引上げられるので，不可犯性の大きい国への侵略は延引される傾向となる。

c_3 の他の1つとして，第三国が行う恫喝（ブラフ）がある。A国がB国の侵略を計画したとき，B国と同盟関係にある大国CがA国を恫喝するのがその例である。ただし事態によっては諸関係が引裂かれて，A国の侵略が一気に開始されることもありうる。

不可犯性または洞喝が開戦を延引させて，時間が経過したとする。すなわち c_4＝時間が大きくなれば，前述のように上部の曲面につり下るポケットができて，戦意はその中に定着する。つまり戦争政策はハト派とタカ派の中間で膠着状態となるのである。

両氏の論争で，ヒトラーのライン進駐について，関氏は“このときイギリスがタカ派政策にふみきっておれば，ヒトラーは外交的に失敗し……自殺したかもしれない”と思惟実験するが，森島氏はそれは児戯に類すると反論する。イギリスがたちあがるにはヒトラーに叩かれることが必要で，それを見通していたヒトラーがえらかったのだともいう。当時のイギリスは，第一次大戦の経験から戦争のコストを思いしらされていた。しかもライン進駐はそれほどの脅威ではなく，せいぜいくさびの左縁の段階であり，民主々義国イギリスにここで開戦を期待することは不合理だということであろう。カタストロフがおこるのはヒトラーの脅威が増加して，くさびの右縁に到達したときだからである。さらに長期の対独接渉の中で，ヒトラーの洞喝がイギリス国民を蝶々のカタストロフのポケットの中に沈潜させていたともいえる。また大西洋をへだてたアメリカも，その不可犯性は大きく，同じくポケットの中にあったと考えられる。ヒトラーを叩くためには，イギリス国民とアメリカをこのポケットから引出さねばならなかったが，それを実現したのはヒトラーの脅威の増大とチャーチルの秀れた政治力であったというのが森島氏の見解である。

以上のクレオド論に関連して，両氏の防衛論はつぎのように要約できるであろう。

森島氏は日本とソ連の間に，図14の発散の現象——具体的にはソ連の (4) のコースと日本の (5) のコース——を期待しているといえよう。そのための条件として，日本がハト派的思考を堅持し——グラフでいえば下方の曲面にとどまって——さらに日本を侵略してえられるソ連の利益を小さくするように，日本経済の構造改革をも考慮すべきだと主張する。そして日本のハト派的行動を支援する国際世論の洞喝によって，ソ連を蝶々のポケットの中に定着させることも期待できるとする。

関氏はソ連が（4）のコースを進むとは信ぜられず，図の（1）のコースを進むと考えねばならないとする。日本も最低限上方の曲面になければならず，ソ連の（1）のコースを押し返すのは日米安保によるアメリカの洞喝であるという。最悪の事態としてソ連が侵略してきた場合，ごく短時間自力で抵抗し，やがて来援する米軍と協力して，戦線を膠着させるか，できればソ連を撃退したいという。森島氏はアメリカも信用できないというが，アメリカを引きつけるためにも，日本は少なくとも上方の曲面上になければならないとも反論するのである。

お　わ　り　に

“カタストロフ理論は1つの言語である。イソップの寓話のように，同じことを上手にも下手にも言いあらわせる。実験による検証というものがないので，玉石を見分けるのは知的な審美眼と経済観念によるしかない”とルネ・トムはいう。トムのモデルは，実験によって確証できないという理由で，厳格な経験論者から無益な空論として放棄される。現実の科学を導くという点に関しては確かにそうである。しかしもっと長い目でみれば，このモデルになんらかの正しい点があることを，科学者全員が認めてよいのではないかとトムはいう。

第一に，いかなる実験者も，またいかなる定量的モデルも，実在からの定性的な切取りを前提している。つまり安定であり，実験において反覆可能と考えられる“システム”を前もって抽出しているのである。しかもほとんどの科学者はこのような切取りあるいは分割は“先験的”に与えられたもの，動かしえないことがらだと考えがちである。しかし分割の問題をあらためてとりあげ，抽象的な一般論の枠組みにとり入れるようにするほうが望ましいのではあるまいか。

第二に，科学の究極の目標は，実験あるいは歴史のデータを無差別的に蓄積することにあるのではなくて，これらのデータを包摂し，説明するような，なんらかの意味で形式化された構造に組織化することにある。そのためには，事象のおこり方について“先験的”な観念，いいかえればモデルをもたねばなら

ない。現在までのところ，科学におけるモデルの構成は，いわば“まぐれ当り”であった。しかしいまやモデルの構成自体が，科学ではないとしても，少なくとも技術とならねばならない。トムのモデルは，そのような“モデルの一般理論”への第一歩ではあるまいか。

第三に，これまで放棄されていた問題を理解できる新しい言語体系であるということである。これまで数理的な経済学では，現象のメカニズムに関する理論仮説を方程式体系にあらわし，それに数学解析をほどこして，一定の検証可能な命題を演繹する分析方法がとられた。しかしはじめに述べたように，この方法には限界があり，そのため解釈を誤ったり，“謎”として放棄された問題がいくつかある。中心的なものとして，原因の連続的な変化が非連続で分裂する結果を導くような現象がある。トムのモデルはこれらを説明し，放棄された理論を発展せしめる言語体系なのである。

ところで同じく質的変化のための言語体系として，すでに“弁証法”があったという主張もあろう。前述の現象，質の変化を弁証法の言葉で理解できたと思う人もおれば，そうした記述はなんの説明にもならないと反発する人もいる。要はどちらの言語による説明がよく“わかる”かの問題である。

“歴史の教訓から学ぶ”にしても，蓄積された歴史のデータから一部を切取って“もしも……”をいう前に，データの全体を，ときにあらわれる分裂的な結果をも含めて，正確に説明できる言語体系を構成することが必要である。トムのカタストロフ論がそうした言語体系の優れた1つであることは確かであろう。

（資料）論争の経過

（サンケイ新聞　53年9月1日）　関嘉彦“有事の対応策は必要”

イギリス人は“無知と軽卒と善良な性質により邪悪なもの（ナチス・ドイツ）に再軍備を許し……戦う必要のない戦争”を招きよせたというチャーチルの言葉のごとく，現在日本で最も心配なものは，善意ではあるが歴史の教訓に無知な平和主義者の平和論である。日本に侵略の脅威がせまっていることはないとしても，万一に備えた防衛組織，たとえば核攻撃に対するシェルターの用意をすべきである。歴史の教訓として，ヒトラーがスイスを通ってフランスに攻め入ることを断念したのは，スイスの民兵組織の抵抗を恐れたからである。

(北海道新聞　54年1月1日)　森島通夫“何をなすべきでないか”

“日本は1980年代に何をなすべきか”が注文であったが，外国に住む自分の任ではないと断っている。しかし帰国の機中で読んだ関氏の一文を思いだして“なすべきでないか”を書くこととした。

関氏がいうように，確かに歴史の教訓かから学ばないのは愚かなことであるが，第二次大戦から学ばねばならないことは，つぎのことである。(i) イギリスに勝利をもたらしたのは，ナチス討伐の連合軍をまとめあげた政事力であり，軍事力ではない。(ii) スイスを守ったのは民兵組織ではなく，中立国という政治的地位である。(iii) イギリスが強力な軍備をもっていたとしても，ヒトラーがいる限り戦争はさけられず，もしヒトラーが排除されたとしても，軍備主義者がはびこったイギリスとなり，ナチスが勝ったのと大差はなかったろう。

(北海道新聞，1月29日)　関“最小限の自衛力は必要”

(i) 森島氏はスイスが中立国であったことを強調するが，同じく中立国であったベルギーは侵略されたではないか。(ii) 私の主張は，単にイギリスが再軍備しておれば，戦争を防ぎえたというのではなく，その軍備を背景に強硬態度にでておれば，戦争を防ぎえたろうというのである。(iii) 連合軍をまとめたのは確かにチャーチルの政治力であるが，軍事的に崩壊しておれば，それもできなかったはずである。結局国を守るには最小限の自衛力をもつべきであるという私の主張に対する森島氏の見解はどうなのか？

(北海道新聞　3月9日)　森島

“最小限の自衛力”を抽象的に論じても無意味である。(i) 関氏は核シェルターをいうが，それは核攻撃をうける公算もあるということだろう。このため有核による強化にならざるをえない。(ii) 有核となれば，先制攻撃を考えても，ソ連の4割が必要であろうし，先制攻撃を封じるには対等の核兵器がなければ勝目はない。この場合，パンよりも大砲を選ぶわけで，日本は深刻な貧困にあえぐこととなる。(iii) 日米安保があるから4割の核兵器は要らぬという人もあろう。しかしソ連に不信感をもつなら，アメリカに対しても見殺しにされるかもしれないという不信感をもつべきだ。(iii) 核兵器が発達した現在，戦争がおこればおしまいである。残された唯一の自衛法は戦争をおこさないことであり，そのためには開戦前に活躍する人を充実するよりほかない。そして不幸にして最悪の事態となれば，白旗と赤旗をもって平静にソ連側を迎えるより他ない。そしてソ連の支配下でも，日本人がしっかりさえしておれば，日本に適した社会民主々義経済を建設することは可能である。

(北海道新聞　3月10日)　関

(i) 戦争がおこらなくするため，平時に平和のため活躍する人を充実せよという意見には賛成である。しかし同時に平時にあっても，最小限の自衛力は必要である。(ii) 人口，工業力ともに秀れた日本を一国が支配した場合，他国も同様に一部を占領することになろう。その結果分割支配されるか，日本が戦場化することもありえよう。

(iii) アメリカ人とともに，ソ連人を信ずべきだというが，全体主義国の独裁者を無条件に信頼することはできない。（こうした経過の中で，新聞では枚数の制限のため十分な論義が行えないことがわかり，後半の論争は雑誌“文芸春秋”に移されている。同誌7月号で，森島氏は“新「新軍備計画論」”を，関氏は“非武装で平和は守れない”を，また10月号でそれぞれ補論を展開している。）

（森島“新「新軍備計画論」”）

スイス問題が教えるように，日本が攻撃される確率は，日本攻略によってえられる戦略的利益と，攻略に要する費用（犠牲）に依存する。日本の地理的，戦争経済的価値はきわめて大きいから，日本攻略によってえられる莫大な利益を断念させるためには，相手にそれ以上の軍事的犠牲を強制しなければならない。そのためには，日本は重装備とならざるをえず，ソ連の4割程度は必要であろう。対ソ連4割としても全経済力を注ぎこまねばならず，また4割であれば，先制攻撃を行わねばならず，文民統制は難しい。したがってアメリカの援助を頼りにして中装備するしかない。しかし日本が攻撃される場合第三次大戦の勃発と受取られるから，アメリカは世界戦略の立場から，日本を真先に防衛しなければならないと考えるだろうか。日米安保を前提とする中装備も頼りないものとなる。日本国防案がこのように全て行詰まるのは，敵に大きな犠牲を与えることだけが日本を守るゆえんだという発想にたったからである。発想を変えて，日本を攻撃すれば，日本を中立的地位に置いておくことからえられる利益を失うことになることを敵に思いしらせるように，日本が行動することを前提としてはどうか。つまりソフト・ウェアによる国防への転換である。しかしソフト・ウェアの国防では心細いという人は，関氏のほかにも多ぜいいる。森島の考え方で日本の安全が確実に守られるかと問われれば，答えはもちろんノーである。それではどうするかと問われれば“毅然として威厳を保ちつつ秩序整然と降伏する”と答える。“不幸にして最悪の事態がおこれば，白旗と赤旗をもって平静にソ連を迎えるほかない。”34年前に米軍を迎えたように…そしてソ連の支配下でも，しっかりしてさえおれば，日本に適合した社会民主主義経済を建設することは可能で，核戦争をするよりもよい。猪木氏は“防衛費がGNPの0.9%では国際社会の一員としての責任を果していない”（「正論」4月号“安全論争興すべし”）というが，スエーデンの3.4%とすれば2.5%増となるが，これだけ軍備を増加すれば，平和の風船は一挙に破れてしまうかもしれない。日本のGNPはそれほど大きく，2.5%を文化交流，経済援助や共産諸国との関係改善等のために追加すれば，積極外交をしやすくなり，ソ連は日本の仲介能力を評価し，日本はそれだけ安全になるだろう。（ソフト・ウェアへの発想転換は，大艦巨砲から空母中心への変換を主張した井上成美大将の“新軍備計画論”の現代版という意味で，この論文は井上大将に捧げられている。）

（関“非武装で平和は守れない”）

ヒトラーに限らず全体主義国の指導者がいる限り，そして相手が無抵抗に近い状態だとする限り，武力をもって相手を侵略する公算は大きく，少しでも抵抗すれば戦争にな

らざるをえない。仮にソ連が難題をもちかけ，それをのまない場合，日本人が白旗と赤旗でそれを迎えるのを知った場合，他国がそれを傍観するだろうか。人口，工業力の点で戦略的価値をもつ日本を支配するために，他の国々も一部を占領することになろう。日本の安全保障となるのは日米安保による米国との協力である。まず通常兵器による小規模攻撃は日本自身の力で撃退しなければならない。大規模な通常兵器の攻撃では，アメリカの援兵がくるまで2週間程度は独力で戦わないと，占領の既成事実ができて，援助も難しくなろう。核兵器による脅迫をしてくる場合は，アメリカの核の報服力で抑止してもらうほかない。そのとき抑止力をヨリ効果的にするためには，日本も核攻撃に対するシェルターを用意すべきである。日本は（絶対にとはいわないが）核兵器はもつべきでないが，それと核攻撃から守る備えをすることとは別問題である。アメリカが日本を見捨てるか否かは，日本側の対応策に依存することが多い。アメリカと共同してできる限り自衛することが必要で，“白旗と赤旗”でソ連を迎えるようでは，アメリカは日本を友好国としてでなく，潜在的敵国として遇するであろう。結局は人間観の差違かもしれないが，全体主義国の独裁者を無条件に信頼することはできない。ソ連に占領されていて，自決権をもちえている国があるだろうか。ハンガリーやチェコは自決権を回復しようとして，ソ連の戦車で征服されてしまったし，モスコーに同調しないイタリヤ共産党が NATO の一方的解散を主張しななったのも，ユーゴが軍備をおろそかにしないのも，ソ連の占領と自決権の喪失を恐れているからである。私は日本をこのような運命にあわせたくないだけで，自衛力強化論者ではあるが，侵略に対して一億玉砕して戦えと主張するのではない。ソフト・ウェアの強化には賛成であるが，それは必要最小限度の軍事力を否定することではない。またスイス，ベルギー，オランダでは小軍備でも文民統制は可能であり，日本人がとくに文民統制に不得手だとは思わない。

（註1）“$m\times n$ 次（$m\leq n$）の行列 A は $r\times r$ 次の少くとも一つが0ならざる行列式をもち，かつそれより高次のすべての正方小行列の行列式が0なるとき，その階数が r である。 階数 r については $r\leqq m\leqq n$ である”と定義される。この定義から任意の行列の階数を求めることは可能であるが，尨大な計算量となる。迅速に階数を求める方法が必要となるが“対等行列”という概念がその鍵となる。〔$m\times n$ 次の2つの行列 A と B があるとき，$m\times m$ 次の適当な行列 P および $n\times n$ 次の Q に対して，$B=PAQ$ であれば，A と B とは対等である。〕そして対等な行列は同じ階数をもつので，簡単な B を求めて，それから A の階数を知る方法である。とくに A が対称行列であれば簡単である。 A を $n\times n$ 次の対象行列とすれば“A はある対角行列 λ に直交的に対等である。すなわち $PAP'=PAP^{-1}=\lambda$〔λ はあるベクトル $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ である〕なるごとき直交行列 P が求められる。“(Mac Duffee の定理) すなわち，たとえば

$$PAP'=\lambda$$
$$\downarrow$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となり，左辺中央の行列と右辺の対角行列は対等である。したがって A の階数が 2 であることが直ちにわかる。〔$n \times n$ 次の行列 A は $AA'=I$ であれは直交である。〕

（註2）　モースの定理

ヘッス行列は対称行列であるからその固有値はすべて実数である。重複度も込めた固有値 0 の個数をヘッス行列の“退化次数”重複度も込めた負の固有値の個数を“指標”とよぶ

(1)　$n \times n$ 次のヘッス行列の退化次数を k，指標を l とすれば，ヘッス行列は，対角行列

$$
\left.\begin{pmatrix}
-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & -\lambda_l & & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & \lambda_{l+1} & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & \lambda_{m-k} & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & & 0 & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & & & 0
\end{pmatrix}\right\} k \text{ 個}
$$

と対等である。

(2)　p を $f: M-R$ の指標 λ の非退化特異点とする。そのとき p を中心とする局所座標系〔$U(x_1, \cdots, x_m)$〕で，U 上で等式

$$f=f(p)-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_m^\lambda$$

が成立するものがある。

(3)　C^∞ 級関数 $F: M \times R^k \to R$ と，点 $a \varepsilon R^h$ に対して，$f_a M-R$ を $f_a(p)=F(p, a)$ で定義する。いま点 $p_0 \varepsilon M$ が，$f_0(o \varepsilon R^k)$ の指標 λ の非退化特異点とする。 そのとき R^k の原点の近傍 V と，p_0 の M における近傍 U と，C^∞ 級写像 $P: V \to U$ および $\mathrm{x}=(x_1, \cdots, x_m)$: $U \times V \to R^m$ で，つぎの条件を満たすものがある。

(i)　$P(o)=p_0$

(ii)　$x_{i,a}$: $U \to R$ を $x_{i,a}(q)=x_i(p, q)$ で定義すると（ただし $a \ni V$），〔$U(x_{1,a}, \cdots, x_{ma})$〕は，$p_a=P(a)$ を中心とする M の局所座標系である。

(iii) U 上で等式

$$f_a=f_a(p_a)-x_{1,a}^{2}-x^{2}{}_{,a}^{2}\cdots-x_{\lambda,2}^{a}+x_{\lambda+1,a}^{2}+\cdots+x_{m}{}^{2},$$

が成り立つ。