Goldbach の問題における関数 $\phi(n)$

南　　　茂

正の偶数2つの素数の和で表す方法の数を $d(n)$ と定義す。自然数を6つ剰余類に分けてこれを

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

と記す。4以上の偶数を2つの素数の和で表すとき $3+k$ なる表し方の1個を例外とすれば

$$A_0=A_1+A_5$$
$$A_2=A_1+A_1$$
$$A_4=A_5+A_5$$

今 A_0 に属する数，即ち6の倍数の場合を考えるものとすれば Riemann の素数分布の公式を用い n 以下の素数の数は概数的に

$$\frac{n}{\lg n}$$ (註1)

であるから2つの素数の和で表す方法の数を $\phi(n)$ とすればこれは近似的に (註2)

$$\left(\frac{2}{\lg n}\right)^2\frac{n}{2}=\frac{2n}{(\lg n)^2}$$

で表される。又これを常用対数に直せば (註3)

$$\frac{2n}{(\lg n)^2}=\frac{0.377n}{(\log n)^2}$$

となる A_2, A_4 に属する数の場合はそれぞれ $\frac{1}{2}$ となるから次の定理を得る

定理: $d(n)$ は近似的に $\phi(n)$ で表される。但し

$$\boxed{\phi(n)=\begin{cases}\dfrac{0.377n}{(\log n)^2} & (n\in A_0)\\[2ex] \dfrac{0.377n}{2(\log n)^2} & (n\in A_2,\ A_4)\end{cases}}$$

これにより3で割れる偶数の $d(n)$ はその前後の3で割れない偶数の $d(n)$ の約2倍になることが知られる。以下1から1,000までの $d(n)$ の表を作成す。

註1　Jacues Hadamard, De da Vallée Poussin (1896).

註2　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d(n)}{\phi(n)}=1$　の意味。

註3　自然対数を lg 常用対数を log と記す。

n	$d(n)$	$\phi(n)$	n	$d(n)$	$\phi(n)$	n	$d(n)$	$\phi(n)$	n	$d(n)$	$\phi(n)$	n	$d(n)$	$\phi(n)$
2	—	2,081	**102**	**8**	**9,528**	202	9	7,167	302	9	9,256	**402**	**17**	**22,350**
4	1	**3,737**	104	5	4,819	**204**	**14**	**14,413**	304	10	9,295	404	11	11,214
6	**1**	1,849	106	6	4,873	206	7	7,252	**306**	**15**	**18,666**	406	13	11,243
8	1	1,849	**108**	**8**	**9,851**	208	7	7,297	308	8	9,372	**408**	**20**	**22,563**
10	2	1,885	110	6	4,978	**210**	**19**	**14,683**	310	12	9,417	410	13	11,319
12	**1**	**3,899**	112	7	5,029	212	6	7,386	**312**	**17**	**18,911**	412	11	11,357
14	2	2,009	**114**	**10**	**10,157**	214	8	7,430	314	9	9,493	**414**	**21**	**22,789**
16	2	2,081	116	6	5,133	**216**	**13**	**14,948**	316	10	9,538	416	10	11,432
18	**2**	**4,309**	118	6	5,181	218	7	7,518	**318**	**15**	**19,151**	418	11	11,470
20	2	2,227	**120**	**12**	**10,467**	220	9	7,561	320	11	9,613	**420**	**30**	**23,014**
22	3	2,303	122	4	5,285	**222**	**11**	**15,207**	322	11	9,650	422	11	11,544
24	**3**	**4,751**	124	5	5,336	224	7	7,646	**324**	**20**	**19,373**	424	12	11,581
26	3	2,448	**126**	**10**	**10,771**	226	7	7,688	326	7	9,731	**426**	**21**	**23,236**
28	2	2,501	128	3	5,435	**228**	**12**	**15,459**	328	10	9,767	428	9	11,655
30	**4**	**5,184**	130	7	5,483	230	9	7,771	**330**	**23**	**19,606**	430	14	11,692
32	2	2,663	**132**	**8**	**11,062**	232	7	7,819	332	6	9,847	**432**	**19**	**23,457**
34	4	2,734	134	6	5,583	**234**	**15**	**15,719**	334	11	9,883	434	10	11,765
36	**4**	**5,606**	136	5	5,629	236	9	7,900	**336**	**19**	**19,852**	436	11	11,801
38	2	2,869	**138**	**8**	**11,424**	238	9	7,940	338	9	9,962	**438**	**21**	**23,674**
40	3	2,938	140	7	5,730	**240**	**18**	**15,973**	340	13	10,005	440	14	11,873
42	**4**	**6,011**	142	8	5,780	242	8	8,026	**342**	**17**	**20,080**	442	12	11,909
44	3	3,072	**144**	**11**	**11,657**	244	9	8,072	344	10	10,075	**444**	**21**	**23,890**
46	4	3,135	146	6	5,877	**246**	**16**	**16,222**	346	9	10,117	446	12	11,981
48	**5**	**6,404**	148	5	5,925	248	6	8,157	**348**	**21**	**20,303**	448	12	12,016
50	4	3,269	**150**	**12**	**11,943**	250	8	8,195	350	12	10,194	**450**	**27**	**24,103**
52	3	3,329	152	4	6,018	**252**	**16**	**16,480**	352	10	10,228	452	12	12,087
54	**5**	**6,784**	154	8	6,063	254	9	8,278	**354**	**20**	**20,540**	454	12	12,122
56	3	3,445	**156**	**11**	**12,229**	256	8	8,322	356	9	10,312	**456**	**24**	**23,775**
58	4	3,518	158	5	6,159	**258**	**14**	**16,719**	358	12	10,345	458	9	12,192
60	**6**	**7,155**	160	8	6,209	260	10	8,403	**360**	**22**	**20,774**	460	16	12,227
62	3	3,639	**162**	**10**	**12,505**	262	9	8,447	362	8	10,420	**462**	**28**	**24,524**
64	5	3,699	164	5	6,301	**264**	**16**	**16,966**	364	14	10,461	464	12	12,297
66	**6**	**7,511**	166	6	6,349	266	8	8,526	**366**	**18**	**21,005**	466	12	12,340
68	2	3,815	**168**	**13**	**12,794**	268	9	8,569	368	8	10,535	**468**	**23**	**24,749**
70	5	3,876	170	9	6,444	**270**	**19**	**17,224**	370	14	10,576	470	13	12,409
72	**6**	**7,871**	172	6	6,485	272	7	8,647	**372**	**18**	**21,233**	472	13	12,443
74	5	3,993	**174**	**11**	**13,062**	274	11	8,689	374	10	10,649	**474**	**22**	**24,944**
76	5	4,049	176	7	6,577	**276**	**16**	**17,463**	376	11	10,689	476	13	12,511
78	**7**	**8,215**	178	7	6,628	278	7	8,773	**378**	**22**	**21,459**	478	11	12,554
80	4	4,164	**180**	**14**	**13,345**	280	14	8,815	380	12	10,761	**480**	**28**	**25,176**
82	5	4,219	182	6	6,717	**282**	**16**	**17,712**	382	10	10,801	482	10	12,622
84	**8**	**8,555**	184	8	6,761	284	8	8,897	**384**	**19**	**21,681**	484	14	12,655
86	5	4,330	**186**	**13**	**13,608**	286	12	8,938	386	12	10,872	**486**	**22**	**25,377**
88	4	4,389	188	5	6,853	**288**	**17**	**17,956**	388	9	10,911	488	9	12,731
90	**9**	**8,887**	190	8	6,896	290	10	9,018	**390**	**27**	**21,901**	490	19	12,764
92	4	4,496	**192**	**11**	**13,888**	292	8	9,059	392	11	10,990	**492**	**21**	**25,595**
94	5	4,552	194	7	6,986	**294**	**19**	**18,197**	394	11	11,020	494	12	12,830
96	**7**	**9,213**	196	9	7,033	296	8	9,138	**396**	**20**	**22,119**	496	13	12,873
98	3	4,660	**198**	**13**	**14.148**	298	11	9,178	398	7	11,098	**498**	**23**	**25,811**
100	6	4,713	200	8	7,120	**300**	**22**	**18,434**	400	14	11,137	500	11	12,938

n	d(n)	ϕ (n)	n	d(n)	ϕ (n)	n	d(n)	ϕ (n)	n	d(n)	ϕ (n)	n	d(n)	ϕ (n)
502	15	12,980	602	11	14,683	**702**	**30**	**32,674**	802	16	17,926	902	14	19,472
504	**25**	**26,026**	604	14	14,721	704	16	16,361	**804**	**32**	**35,917**	904	17	19,502
506	13	13,045	**606**	**27**	**29,519**	706	19	16,396	806	16	17,991	**906**	**33**	**39,063**
508	14	13,077	608	13	14,787	**708**	**24**	**32,861**	808	14	18,023	908	15	19,561
510	**31**	**26,238**	610	20	14,825	710	16	16,466	**810**	**38**	**36,111**	910	30	19,591
512	11	13,151	**612**	**25**	**29,726**	712	16	16,500	812	17	18,075	**912**	**30**	**39,242**
514	14	13,183	614	14	14,890	**714**	**34**	**33,047**	814	20	18,107	914	20	19,651
516	**22**	**26,430**	616	21	14,917	716	14	16,558	**816**	**33**	**36,278**	916	18	19,681
518	11	13,169	**618**	**26**	**29,834**	718	15	16,593	818	17	18,171	**918**	**35**	**39,420**
520	17	13,288	620	17	14,992	**720**	**38**	**33,255**	820	20	18,203	920	22	19,740
522	**23**	**26,658**	622	17	15,0 9	722	14	16,650	**822**	**27**	**36,470**	922	19	19,769
524	10	13,361	**624**	**31**	**30,114**	724	15	16,685	824	15	18,267	**924**	**46**	**39,598**
526	15	13,392	626	11	15,083	**726**	**30**	**33,438**	826	20	18,299	926	17	19,842
528	**25**	**26,846**	628	16	15,121	728	13	16,753	**828**	**34**	**36,661**	928	18	19,858
530	13	13,464	**630**	**40**	**30,316**	730	21	16,788	830	20	18,362	**930**	49	39,801
530	17	13,525	632	10	15,185	**732**	**30**	**33,620**	832	22	18,394	932	17	19,930
534	**21**	**27,052**	634	14	15,222	734	14	16,844	**834**	**33**	**36,851**	934	20	19,959
536	12	13,567	**636**	**27**	**30,518**	736	19	16,878	836	17	18,457	**936**	**36**	**39,977**
538	14	13,597	638	15	15,285	**738**	**29**	**33,825**	838	17	18,488	938	18	20,018
540	**30**	**27,276**	640	18	15,348	740	17	16,947	**840**	**51**	**37,040**	940	24	20,047
542	9	13,668	**642**	**24**	**30,696**	742	18	16,981	842	17	18,551	**942**	**33**	**40,152**
544	13	13,699	644	15	15,385	**744**	**30**	**34,005**	844	16	18,583	944	18	20,105
546	**29**	**27,478**	646	16	15,422	746	16	17,036	**846**	**31**	**37,228**	946	22	20,134
542	11	13,769	**648**	**26**	**30,895**	748	19	17,070	848	15	18,645	**948**	**32**	**40,327**
550	19	13,809	650	21	15,484	**750**	**39**	**34,208**	850	25	18,676	950	24	20,192
552	**22**	**27,679**	652	15	15,521	752	12	17,138	**852**	**30**	**37,415**	952	24	20,221
554	11	13,869	**654**	**28**	**31,092**	754	17	17,171	854	20	18,739	**954**	**35**	**40,500**
556	11	13,909	656	12	15,583	**756**	**34**	**34,386**	856	19	18,770	956	19	20,293
558	**23**	**27,878**	658	19	15,619	758	15	17,226	**858**	**38**	**37,601**	958	22	20,321
560	17	13,979	**660**	**40**	**31,289**	760	21	17,260	860	17	18,819	**960**	**45**	**40,700**
562	14	14,008	662	13	15,681	**762**	**30**	**34,587**	862	17	18,850	962	15	20,379
564	**23**	**28,096**	664	16	15,728	764	17	17,327	**864**	**32**	**37,761**	964	18	20,408
566	12	14,077	**666**	**31**	**31,506**	766	17	17,360	866	17	18,911	**966**	**43**	**40,872**
568	13	14,117	668	11	15,778	**768**	**31**	**34,787**	868	21	18,942	968	17	20,464
570	**30**	**28,292**	670	20	15,814	770	25	17,426	**870**	**42**	**37,946**	970	27	20,493
572	10	14,185	**672**	**33**	**31,700**	772	17	17,448	872	17	19,004	**972**	**31**	**41,044**
574	16	14,214	674	14	15,875	**774**	**31**	**34,961**	874	19	19,034	974	17	20,550
576	**25**	**28,507**	676	17	15,911	776	15	17,514	**876**	**36**	**38,130**	976	19	20,593
578	12	14,389	**678**	**28**	**31,893**	778	15	17,547	878	14	19,108	**978**	**35**	**41,242**
580	19	14,346	680	20	15,971	**780**	**43**	**35,159**	880	25	19,139	980	25	20,649
582	**25**	**28,699**	682	16	16,006	782	14	17,613	**882**	**38**	**38,339**	982	18	20,678
584	12	14,489	**684**	**30**	**32,084**	784	18	17,645	884	19	19,200	**984**	**37**	**41,412**
586	13	14,417	686	15	16,078	**786**	**30**	**35,356**	886	18	19,230	986	19	20,734
578	**29**	**28,912**	688	15	16,102	788	15	17,699	**888**	**37**	**38,521**	988	23	20,762
590	15	14,484	**690**	**38**	**32,275**	790	22	17,731	890	23	19,291	**990**	**52**	**41,581**
592	15	14,523	692	10	16,173	**792**	**34**	**35,528**	892	19	19,321	992	13	20,819
594	**26**	**29,101**	694	19	16,208	794	16	17,797	**894**	**32**	**38,703**	994	25	20,860
596	12	14,589	**696**	**29**	**32,464**	796	14	17,829	896	19	19,291	**996**	**37**	**41,777**
598	14	14,617	678	14	16,267	**798**	**38**	**35,723**	898	19	19,412	998	16	20,916
600	**31**	**29,311**	700	23	16,302	800	20	17,894	**900**	**48**	**38,883**	1000	28	20,945