

## 4 倍—5 倍—6 倍 過 剰 数

南 茂

一つの自然数の約数の総和が、もとの自然数の丁度  $n$  倍に等しいときこの数  $n$  を倍数, または  $n-1$  倍過剰数と称してこれを  $M_n$  で表わす。 $M_2$  (完全数),  $M_3$ ,  $M_4$  の例は過去に研究されているからさらに進んで  $M_5$ ,  $M_6$ ,  $M_7$  の各数を示し, その証明をのべよう。主として使われる公式は

$A=a^l b^m c^p$  とするとき  $\sigma(A)$  を約数の総和と

$$\text{すれば } \sigma(A) = \frac{a^{l+1}-1}{a-1} \frac{b^{m+1}-1}{b-1} \frac{c^{p+1}-1}{c-1} \text{ である}$$

$M_5=14182439040$  は 4 倍過剰数である (昭和49年2月)

$M_5=2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$  より約数総和の対応表により

$$\frac{\sigma(M_5)}{M_5} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 17}{2^7} \frac{11^2}{3^4} \frac{2 \cdot 3}{5} \frac{2^3}{7} \frac{7 \cdot 19}{11^2} \frac{2 \cdot 3^2}{17} \frac{2^2 \cdot \textcircled{5}}{19} = 5$$

により  $M_5$  は 4 倍過剰数となる。

$M_6=154345556085770649600$  は 5 倍過剰数である (昭和49年11月)

$M_6=2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 257$  より

$$\frac{\sigma(M_6)}{M_6} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257}{2^{15}} \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 13}{3^5} \frac{31}{5^2} \frac{3 \cdot 19 \cdot 2^2 \cdot 3}{7^2} \frac{2 \cdot 7}{11} \frac{2 \cdot 3^2}{13} \frac{2^2 \cdot 5}{17} \frac{2^5}{19} \frac{2^5}{31} \frac{2^2 \cdot 11}{43} \frac{\textcircled{2} \cdot \textcircled{3} \cdot 43}{257} = 6$$

で  $M_6$  は 5 倍過剰数である。次に 79 桁の数を示そう

$M_7=176578874221165222679594989689924702118577739593173235301821979$   
 $4626772992000000$  は 6 倍過剰数である (昭和52年11月)

$M_7=2^{35} \cdot 3^{15} \cdot 5^6 \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 29 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 179 \cdot$   
 $193 \cdot 257 \cdot 263 \cdot 307 \cdot 3221 \cdot 4733 \cdot 19531$

と素因数分解される。準備として  $2^{35}$ ,  $3^{15}$ ,  $5^6$ ,  $7^6$ ,  $11^4$  の約数の総和を求めてみる。

$$\begin{aligned}\sigma(2^{35}) &= 2^{36} - 1 = (2^6 - 1)(2^{12} + 2^6 + 1)(2^6 + 1)(2^{12} - 2^6 + 1) \\ &= 63 \cdot 4161 \cdot 65 \cdot 4033 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 109\end{aligned}$$

$$\sigma(3^{15}) = \frac{3^{16} - 1}{3 - 1} = \frac{(3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)}{2} = \frac{80 \cdot 82 \cdot 6562}{2} = 2^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 193$$

$$\sigma(5^6) = \frac{5^7 - 1}{5 - 1} = \frac{78124}{4} = 19531$$

即ち右側の 7 を残して他の  
の因数は全部消去される。

$$\sigma(7^6) = \frac{7^7 - 1}{7 - 1} = \frac{823542}{6} = 137257 = 29 \cdot 4733$$

$$\sigma(M_7) = 7(M_7)$$

$$\sigma(11^4) = \frac{11^5 - 1}{11 - 1} = \frac{161050}{10} = 5 \cdot 3221$$

$M_7$  は 6 倍過剰数となる  
(下表参照)

M		$\sigma(M_7)$
<del>2<sup>35</sup></del>		<del>2<sup>35</sup> · 7 · 13 · 19 · 37 · 73 · 109</del>
<del>3<sup>15</sup></del>		<del>3<sup>15</sup> · 17 · 41 · 193</del>
<del>5<sup>6</sup></del>		19531
<del>7<sup>6</sup></del>		29 · 4733
11 <sup>4</sup>		5 · 3221
13	(14)	2 · 7
17 <sup>2</sup>		307
19 <sup>2</sup>		3 · 127
29	(30)	2 · 3 · 5
37 <sup>2</sup>		3 · 7 · 67
41	(42)	2 · 3 · 7
43	(44)	2 · 11
67	(68)	2 · 17
73	(74)	2 · 37
97	(98)	2 · 7
109	(110)	2 · 5 · 11
127	(128)	2
179	(180)	2 · 3
193	(194)	2 · 97
257	(258)	2 · 3 · 43
263	(264)	3 · 3 · 11
307	(308)	2 · 7 · 11
3221	(3222)	2 · 3 · 179
4733	(4734)	2 · 3 · 263
19531	(19532)	2 · 19 · 257

約 数 の 総 和 表							
2 <sup>2</sup>	7	2 <sup>10</sup>	2147483647	5 <sup>8</sup>	2・3・7・31	13 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup> ・61・1609669
2 <sup>3</sup>	3・5	2 <sup>11</sup>	3・5・17・257・65537	5 <sup>8</sup>	19531	17 <sup>2</sup>	307
2 <sup>4</sup>	31	2 <sup>12</sup>	7・23・89・599497	5 <sup>8</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・13・313	17 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3 <sup>2</sup> ・5・29
2 <sup>5</sup>	7・3 <sup>2</sup>	2 <sup>12</sup>	3・43691・131071	5 <sup>8</sup>	19・31・829	17 <sup>2</sup>	88741
2 <sup>6</sup>	127	2 <sup>14</sup>	31・71・127・122921	5 <sup>8</sup>	2・3・11・71・521	17 <sup>2</sup>	2・3・5・7 <sup>2</sup> ・1307
2 <sup>7</sup>	3・5・17	2 <sup>15</sup>	3 <sup>2</sup> ・5・7・13・19・37・73・109	5 <sup>10</sup>	12207031	17 <sup>2</sup>	25646167
2 <sup>8</sup>	7・73	3 <sup>2</sup>	13	7 <sup>2</sup>	3・19	19 <sup>2</sup>	3・127
2 <sup>9</sup>	3・11・31	3 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5	7 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5 <sup>2</sup>	19 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・181
2 <sup>10</sup>	23・89	3 <sup>4</sup>	11 <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>	2801	19 <sup>2</sup>	151・911
2 <sup>11</sup>	3 <sup>2</sup> ・5・7・13	3 <sup>5</sup>	2 <sup>2</sup> ・7・13	7 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・19・43	19 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・5・7 <sup>2</sup> ・127
2 <sup>12</sup>	8191	3 <sup>6</sup>	1093	7 <sup>2</sup>	29・4733	19 <sup>2</sup>	43・1154873
2 <sup>13</sup>	3・43・127	3 <sup>7</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・41	7 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5 <sup>2</sup> ・1201	23 <sup>2</sup>	7・79
2 <sup>14</sup>	7・31・151	3 <sup>8</sup>	13・757	7 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup> ・19・37・1063	29 <sup>2</sup>	13・67
2 <sup>15</sup>	3・5・17・257	3 <sup>9</sup>	2 <sup>2</sup> ・1 <sup>2</sup> ・61	7 <sup>2</sup>	11・191・2801	31 <sup>2</sup>	3・331
2 <sup>16</sup>	131071	3 <sup>10</sup>	23・3851	7 <sup>10</sup>	1123・293459	37 <sup>2</sup>	3・7・67
2 <sup>17</sup>	3 <sup>2</sup> ・7・19・73	3 <sup>11</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・7・13・73	11 <sup>2</sup>	7・19	41 <sup>2</sup>	1723
2 <sup>18</sup>	524287	3 <sup>12</sup>	797161	11 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・61	43 <sup>2</sup>	3・631
2 <sup>19</sup>	3・5 <sup>2</sup> ・11・31・41	3 <sup>12</sup>	2 <sup>2</sup> ・547・1093	11 <sup>2</sup>	5・3221	47 <sup>2</sup>	37・61
2 <sup>20</sup>	7 <sup>2</sup> ・127・337	3 <sup>14</sup>	1 <sup>2</sup> ・13・4561	11 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3 <sup>2</sup> ・7・19・37	53 <sup>2</sup>	7・409
2 <sup>21</sup>	3・23・89・683	3 <sup>15</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・17・41・193	11 <sup>2</sup>	43・45319	59 <sup>2</sup>	3541
2 <sup>22</sup>	47・178481	3 <sup>16</sup>	1871・34511	11 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・61・7321	61 <sup>2</sup>	3・13・97
2 <sup>23</sup>	3・5・7・13・17・241	3 <sup>17</sup>	2 <sup>2</sup> ・7・13・19・37・757	11 <sup>2</sup>	7・1772893	67 <sup>2</sup>	3・7 <sup>2</sup> ・31
2 <sup>24</sup>	31・601・1081	3 <sup>18</sup>	1597・363889	13 <sup>2</sup>	3・61	71 <sup>2</sup>	5113
2 <sup>25</sup>	3・2731・8191	3 <sup>19</sup>	2 <sup>2</sup> ・1 <sup>2</sup> ・61・67・661	13 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・7・17	73 <sup>2</sup>	3・1801
2 <sup>26</sup>	7・73・262657	3 <sup>20</sup>	13・1093・368089	13 <sup>2</sup>	30941	79 <sup>2</sup>	3・7 <sup>2</sup> ・43
2 <sup>27</sup>	3・5・29・47・113・127	5 <sup>2</sup>	31	13 <sup>2</sup>	2・3・7・61・157	83 <sup>2</sup>	19・367
2 <sup>28</sup>	233・234617	5 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・3・13	13 <sup>2</sup>	5229043	89 <sup>2</sup>	8011
2 <sup>29</sup>	3 <sup>2</sup> ・7・11・31・151・331	5 <sup>4</sup>	11・71	13 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup> ・5・7・17・14281	97 <sup>2</sup>	3・3169

M<sub>2</sub>の計算 \* 8桁以上はすべて筆算による。

A=307・19531 =5996017 G=13・37'・19" =6424717  
 B=263・4733 =1244779 H=7'・17" =4857223  
 C=3・257・3221 =2483391 I=2'' =8388608  
 D=127・179・193 =4387469 J=3''' =4782969  
 E=2'・73・97・109 =3087316 K=2'・7・11' =1639792  
 F=29・41・43・67 =3087316 L=2'・5" =1000000

A:5996017	C:2483391	E:3087316	G:6424717	I:8388608
B:1244779	D:4387469	F:3425509	H:4857223	J:4782964
53964153	22350519	27785844	19274151	75497472
41972119	14900346	00000000	12849434	50331648
41972119	9933564	15436580	12849434	75497472
23984068	17383737	15436580	44973019	16777216
23984068	19867128	6174632	32123585	67108864
11992034	7450173	12349264	51397736	58720256
5996017	9933564	9261948	25698868	33554432
7463716045243	10895801027379	10575628743844	31206283180891	40122452017152

CD:10895801027379  
 AB: 7463716045243

32687403082137  
 43583204109516  
 21791602054758  
 54479005136895  
 43583204109516  
 000000000000  
 65374806164274  
 10895801027379  
 76270607191653  
 32687403082137  
 65374806164274  
 43583204109516  
 76270607191653  
 81323164953823806245708097

EF:10575628743844  
 GH:31206283180891

10575628743844  
 95180658694396  
 84605029950752  
 000000000000  
 84605029950752  
 10575628743844  
 31726886231532  
 84605029950752  
 21151257487688  
 63453772463064  
 000000000000  
 21151257487688  
 10575628743844  
 31726886231532  
 330026065396366430954685004

EFGH: 330026065396366430954685004	I J: 40122452017152
ABCD: 81323164953823806245708097	K: 1639792
2310182457774565016682795028	080244904034304
297023458567297878592165036	361102068154368
00000000000000000000000000	280857164120064
2640208523170931447637480032	361102068154368
00000000000000000000000000	120367356051456
2310182457774565016682795028	240734712102912
1650130326981832154773425020	040122452017152
1320104261585465723818740016	65792475838109712384
0660052130792732861909370008	
1980156392378198585728110024	
00000000000000000000000000	
2640208523170931447637480032	
0990078196189099292864055012	
0660052130792732861909370008	
2640208523170931447637480032	
0990078196189099292864055012	
1650130326981832154773425020	
297023458567297878592165036	
1320104261588465723818740016	
1980156392378198585728110024	
0330026065396366430954685004	
0990078196189099292864055012	
0660052130792732861909370008	
0990078196189099292864055012	
0330026065396366430954685004	
2640208523170931447637480032	
26838764155290150125279729381405266510962769567277388	

IJK : 65792475838109712384  
ABCDEFGH: 26838764155290150125279729381405266510962769567277388

\* MはこれにL=10<sup>6</sup>を乗ずる。

526339806704877699072  
526339806704877699072  
197377427514329137152  
460547330866767986688  
460547330866767986688  
131584951676219424768  
460547330866767986688  
394754855028658274304  
328962379190548561920  
592132282542987411456  
394754855028658274304  
460547330866767986688  
131584951676219424768  
394754855028658274304  
592132282542987411456  
00000000000000000000  
065792475838109712384  
328962379190548561920  
394754855028658274304  
394754855028658274304  
131584951676219424768  
328962379190548561920  
00000000000000000000  
263169903352438849536  
065792475838109712384  
526339806704877699072  
197377427514329137152  
592132282542987411456  
131584951676219424768  
460547330866767986688  
592132282542987411456  
460547330866767986688  
131584951676219424768  
328962379190548561920  
131584951676219424768  
065792475838109712384  
00000000000000000000  
328962379190548561920  
065792475838109712384  
00000000000000000000  
592132282542987411456  
131584951676219424768  
328962379190548561920  
328962379190548561920  
065792475838109712384  
263169903352438849536  
394754855028658274304  
460547330866767986688  
526339806704877699072  
197377427514329137152  
526339806704877699072  
394754855028658274304  
131584951676219424768  
1765788742211652226795949896899247021185777395931732353018219794626772992

\* 数の重複出現と検算の便のため上下段

入れ代った掛算形式をとる。