$\mathbb{P}^3$ 内の曲線の極小自由分解についての考察（Part Ⅰ）

A Note on Minimal Free Resolution for Projective Curves in $\mathbb{P}^3$ (Part I)

矢城　信吾※
Shingo Yashiro※

要旨

本研究ノートでは$\mathbb{P}^3$内の曲線の極小自由分解について、Naito（2002）の結果を考察をしていく。この考察を基に$\mathbb{P}^3$内の次数dが７以上の曲線の極小自由分解の構成や射影空間$\mathbb{P}^n (n \geq 4)$ 内の曲線および余次元２の部分多様体の極小自由分解の研究に発展させるのが本研究ノートの目的である。

Keywords：Minimal Free Resolution, Syzygy, Space Curve, Rational Normal Curve, Rational Normal Scroll,Elliptic Normal Curve, Quadric Surface, Del Pezzo Surface.

１　はじめに

３次元射影空間$\mathbb{P}^3$内の非特異射影曲線（空間曲線）の分類は古来より行われてきた。1882 年、空間曲線の分類に関する懸賞「The Steiner Prize」が懸けられた。この問題に対し、Noether（1882）, Halphen（1882）が解決に寄与し、賞を分けた。著者らは、それぞれ 200 ページにわたる論説の中で、約 20 次までの曲線を網羅したリストを作成した。現在では、理論的な側面はよく知られている。近年では Chow 多様体または Hilbert スキームの導入により、与えられた次数dと種数gをもつ$\mathbb{P}^3$内の非特異射影曲線は、ある射影多様体の開集合（準射影多様体の有限和）として、パラメータ付けすることができる。しかし、次のような問題も個々に残っている：

1. 曲線の次数dと種数gを固定したとき、Chow 多様体や Hilbert スキームの次元の決定。
2. 定義イデアルの決定や曲線の極小自由分解の構成。

Hartshorne（1977）では、1970 年代までの空間曲線に関する基本的な結果が述べられている。また Naito（2002）では、６次以下の曲線の極小自由分解およびその Betti Sequence を示している。そこで本稿では、Naito (2002) の結果と証明について考察していく。

２　準備

ここで､本稿で使われる用語の定義を述べておく｡主に、Hartshorne（1977）、Griffiths and Harris（1978）、Harris（1992）、Eisenbud（1995）、Eisenbud（2006）などで用いられる記号である。

- kを標数任意の代数的閉体とする。
- 曲線とは、$\mathbb{P}^3$ 内の非退化で被約かつ既約な非特異射影曲線を意味することとする。
- コホモロジー群 $H^i(X, \mathcal{F})$ の次元を $h^i(X, \mathcal{F})$で表す。

※日本経済大学経済学部商学科

- 主に非特異射影曲線を扱うので、算術種数 $p_a(C)$ と幾何種数 g_C は一致する。よって、種数 gとして扱う。

以下、$C \subset \mathbb{P}^3$を曲線とする。曲線 C が m-regular であるとは、C のイデアル層 $\mathcal{I}_C \subset \mathcal{O}$ について

$$H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(m-1)) = H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(m-2)) = 0$$

が成り立つことである。これに対して

$$I_C = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(l)) \subset S = k[x_0, \ldots, x_3]$$

を C の定義イデアルとする。この I_C の S 加群による極小自由分解を

$$0 \to \bigoplus_{i \geq 4} S(-i)^{\beta_{3,i}} \to \bigoplus_{i \geq 3} S(-i)^{\beta_{2,j}} \to \bigoplus_{i \geq 2} S(-i)^{\beta_{1,i}} \to I_C \to 0$$

とする。C が m-regular であるとき

$$\beta_{1,i} = \beta_{2,i+1} = \beta_{3,i+2} = 0, \text{ for } i \geq m+1$$

が成り立つ（Eisenbud et al., 2005）。ここで

$$(\beta_{1,2}, \ldots, \beta_{1,n} | \beta_{2,3}, \ldots, \beta_{2,n+1} | \beta_{3,4}, \ldots, \beta_{3,n+2})$$

を C の Betti Sequence という。[1] ここで曲線 C の次数 d と種数 gを固定する。６次以下の空間曲線の Betti Sequence を示す。これらは次の (1) ～ (15) のタイプに分類される：

Theorem 1. (Naito（2002）). ６次以下の空間曲線の Betti Sequence は次のようになる：[2]

(d, g)	Betti Sequence	Regularity	Type	ACM or not
$(3, 0)$	$(3\|2\|0)$	2-regular not 1	(1)	ACM
$(4, 0)$	$(1, 3\|0, 4\|0, 1)$	3-regular not 2	(2)	Not ACM
$(4, 1)$	$(2, 0\|0, 1\|0, 0)$	3-regular not 2	(3)	ACM
$(5, 0)$	$(0, 4, 1\|0, 3, 2\|0, 0, 1)$	4-regular not 3	(4)	Not ACM
	$(1, 0, 4\|0, 0, 6\|0, 0, 2)$	4-regular not 3	(5)	Not ACM
$(5, 1)$	$(0, 5\|0, 5\|0, 1)$	3-regular not 2	(6)	Not ACM
$(5, 2)$	$(1, 2\|0, 2\|0, 0)$	3-regular not 2	(7)	ACM
$(6, 0)$	$(0, 1, 6\|0, 0, 9\|0, 0, 3)$	4-regular not 3	(8)	Not ACM
	$(0, 2, 2, 1\|0, 0, 4, 2\|0, 0, 1, 1)$	5-regular not 4	(9)	Not ACM
	$(1, 0, 0, 5\|0, 0, 0, 8\|0, 0, 0, 3)$	5-regular not 4	(10)	Not ACM
$(6, 1)$	$(0, 2, 3\|0, 0, 6\|0, 0, 2)$	4-regular not 3	(11)	Not ACM
$(6, 2)$	$(0, 3, 1\|0, 1, 3\|0, 0, 1)$	4-regular not 3	(12)	Not ACM
$(6, 3)$	$(0, 4\|0, 3\|0, 0)$	3-regular not 2	(13)	ACM
	$(1, 0, 3\|0, 0, 4\|0, 0, 1)$	4-regular not 3	(14)	Not ACM
$(6, 4)$	$(1, 1, 0\|0, 0, 1\|0, 0, 0)$	4-regular not 3	(15)	ACM

表１　各曲線の Betti Sequence

Theorem 1 を示すために、次の定理・補題を用意する：

Theorem 2. (Gruson et al., 1983). C を $\mathbb{P}^3$ 内の次数 d、算術種数 g の非退化で被約かつ既約な射影曲線とする。このとき、C は $(d-1)$ -regular である。また $d \geq 5$ のとき、C が $(d-2)$-regular ではないことと、次の条件 (1)・(2) を満たすことが必要十分である。

(1) C が非特異有理曲線となる。

(2) C が $(d-1)$-secant line をもつ。

より一般的に、C を射影空間$\mathbb{P}^n$ の非退化で被約かつ既約な射影曲線とすると、C は $(d+2-n)$ -regular となる。

次の２つの補題は Betti 数 $\beta_{i,j}$ を計算するために用いられる：

Lemma 1. (Naito, 2002). C を $\mathbb{P}^3$ 内の次数 d、算術種数 g の非退化な射影曲線とし、C を n-regular とする。このとき

$$B_2 := \beta_{1,2},\ \ B_3 := \beta_{1,3} - \beta_{2,3},\ \ B_l := \beta_{1,l} - \beta_{2,l} + \beta_{3,l}\ \text{ for }\ 4 \leq l \leq n+2$$

とおくと、次の 4 つの式が成り立つ：

$$\sum_{l=2}^{n+2} B_l = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{l=2}^{n+2} lB_l = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{l=2}^{n+2} l^2 B_l = -2d, \tag{3}$$

$$\sum_{l=2}^{n+2} l^3 B_l = -12d - 6g + 6. \tag{4}$$

Proof. I_C の Hilbert 多項式 $P_{I_C}(z)$ の係数を比較して求める。まず、I_C の極小自由分解

$$0 \to \bigoplus_{i \geq 4} S(-i)^{\beta_{3,i}} \to \bigoplus_{i \geq 3} S(-i)^{\beta_{2,i}} \to \bigoplus_{i \geq 2} S(-i)^{\beta_{1,i}} \to I_C \to 0$$

より

$$P_{I_C}(z) = \sum_{i=2}^{n} \beta_{1,i} \binom{z+3-i}{3} - \sum_{i=2}^{n+1} \beta_{2,i} \binom{z+3-i}{3} + \sum_{i=2}^{n+2} \beta_{3,i} \binom{z+3-i}{3}$$

がいえる。一方で、Riemann-Roch の定理より

$$P_{I_C}(z) = \binom{z+3}{3} - (dz + 1 - g)$$

がいえる。この z^3, z^2, z の係数と定数項を比較すると、式 (1) ～ (4) を得る。 Q.E.D

Lemma 2. (Naito, 2002). C を $\mathbb{P}^3$ 内の非退化で被約かつ既約な曲線とする。

$$m_0 := \min\{m \in \mathbb{Z} |\ \ H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(m)) \neq 0\}$$

とおく。このとき、I_C の極小自由分解

$$0 \to \bigoplus_{i \geq m_0+2} S(-i)^{\beta_{3,i}} \to \bigoplus_{i \geq m_0+1} S(-i)^{\beta_{2,i}} \to \bigoplus_{i \geq m_0} S(-i)^{\beta_{1,i}} \to I_C \to 0$$

に対して、次のことがいえる。[3)]

(1) $\beta_{2,m_0} = \beta_{3,m_0+1} = 0$。

(2) $\beta_{1,m_0} = 1$ ならば $\beta_{2,m_0+1} = \beta_{3,m_0+2} = 0$。

(3) $\beta_{1,m_0} = 1, \beta_{1,m_0+1} = 0$ ならば $\beta_{2,m_0+1} = \beta_{2,m_0+2} = \beta_{3,m_0+2} = \beta_{3,m_0+3} = 0$。

(4) $\beta_{1,m_0} = 1, \beta_{1,m_0+1} = \beta_{1,m_0+2} = 0$ ならば $\beta_{2,m_0+1} = \beta_{2,m_0+2} = \beta_{2,m_0+3} = \beta_{3,m_0+2} = \beta_{3,m_0+3} = \beta_{3,m_0+4} = 0$。

(5) $\beta_{1,m_0} = 2$ ならば $\beta_{2,m_0+1} = \beta_{3,m_0+2} = 0$。

(6) $\beta_{1,m_0} = \beta_{1,m_0+1} = 1$ ならば $\beta_{2,m_0+1} = \beta_{2,m_0+2} = \beta_{3,m_0+2} = \beta_{3,m_0+3} = 0$。

(7) $\beta_{1,m_0} = 3$ かつ $m_0 \geq 3$ ならば $\beta_{2,m_0+1} \leq 1$ かつ $\beta_{3,m_0+2} = 0$。

Proof. (1) ～ (4) は極小自由分解の極小性から得られる性質である。

(5) について示す。

$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(m_0))$ の基底をf_1, f_2をとる。$\beta_{2,m_0+1} \neq 0$とすると、極小性から$h_1, h_2 \in [S]_1$が取れて、$[S]_{m_0+1}$内において、$h_1f_1 + h_2f_2 = 0$ が成り立つ$h_1, h_2 \neq 0$であり、S は UFD であるから、$h_1|f_2$ かつ $h_2|f_1$ となる。f_1, f_2 は既約かつ被約であるから、これは矛盾となる。よって、$\beta_{2,m_0+1} = 0.$

(6) についても同様に示せる。

(7) について示す。$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(m_0))$ の基底をf_1, f_2, f_3をとる$\beta_{2,m_0+1} \geq 2$のとき、$h_1, \ldots, h_6 \in [S]_1$ がとれて

$$h_1f_1 + h_2f_2 + h_3f_3 = 0, \ \ h_4f_1 + h_5f_2 + h_6f_3 = 0$$

がいえる。このことから

$$f_1 : f_2 : f_3 = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 \\ h_5 & h_6 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} h_3 & h_1 \\ h_6 & h_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_4 & h_5 \end{vmatrix}$$

が得られるが、f_1, f_2, f_3 は既約であるから矛盾する。よって、$\beta_{2,m_0+1} \leq 1$となる。よって、$\beta_{3,m_0+2} = 0$ となる。　Q.E.D

Theorem 3. (Hartshorne (1977), Griffiths and Harris (1978)). $\mathbb{P}^3$ 内の次数 d、種数 g の非退化な非特異射影曲線とすると、$d \geq 3$ であり、

$$g \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & \text{if } d \text{ is even} \\ \frac{1}{4}(d^2 - 1) - d + 1 & \text{if } d \text{ is odd.} \end{cases}$$

この定理から、(d, g) が決定される。

次の 3 節～ 6 節では、$\mathbb{P}^3$ 内の曲線の分類に関して重要な曲線・曲面のクラスについて述べる。

3　２次曲面について

この節では、Hartshorne (1977)、Griffiths and Harris (1978)、Harris (1992) などにそって、$\mathbb{P}^3$ 内の既約 2 次曲面について概説する。特に断らない限り、k は標数 2 でない代数的閉体とする。[4)]

既約 2 次曲面は、(1) 非特異 2 次曲面 Q (2) 2 次錐 Q_0 に分類される。

3.1　非特異2次曲面について

非特異 2 次曲面とは、既約な 2 次斉次多項式 $F(x_0,\dots,x_3)$ で定義される曲面 Q であり、特異点集合

$$\operatorname{Sing} Q = V(\frac{\partial F}{\partial x_0},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_3}) = \phi$$

となるものである。

任意の非特異 2 次曲面は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に同型である。実際に、$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を Segre 埋め込みした像 $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\subset\mathbb{P}^3$ を考えたとき

$$\sigma_{1,1}:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\ni([s_0,s_1],[t_0,t_1])\mapsto[s_0t_0,s_0t_1,s_1t_0,s_1t_1]\in\mathbb{P}^3$$

によって、$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 $Q: x_0x_3-x_1x_2=0$ が定義される。この曲面に変数変換することで同型が示される。

また直線束の同型類全体の集合（Picard 群）$\operatorname{Pic} Q$ は $\operatorname{Pic} Q\cong\mathbb{Z}l_1\oplus\mathbb{Z}l_2$ である。ここで生成元 l_1,l_2 とした。この l_1,l_2 は Intersection Pairing として

$$l_1^2=0, l_1.l_2=1, l_2^2=0$$

の関係がある。さらに考察を進めることで、直線束 $\mathcal{O}_Q(a,b)$ のコホモロジー群は次のように決定される。

Proposition 1. (cf.Hartshorne, 1977; Yashiro, 2022). 直線束 $\mathcal{O}_Q(a,b)$ $(a\geq b)$ のコホモロジー群は次のように決定される：

$$h^0(Q,\mathcal{O}_Q(a,b))=\begin{cases}(a+1)(b+1) & (a,b\geq 0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases},$$

$$h^1(Q,\mathcal{O}_Q(a,b))=\begin{cases}0 & (a,b\geq 0)\\ -(a+1)(b+1) & (\text{otherwise})\\ 0 & (a,b\leq -2)\end{cases},$$

$$h^2(Q,\mathcal{O}_Q(a,b))=\begin{cases}(a+1)(b+1) & (a,b\leq -2)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

がいえる。また、(a,b) 型の曲線C の Q 上でのイデアル層 $\mathcal{I}_{C/Q}$ に対して

$$H^1(Q,\mathcal{I}_{C/Q}(m))=0\ (\forall m\in\mathbb{Z})\iff|a-b|\leq 1$$

となる。

この結果より、C が ACM であるための必要十分条件が $|a-b|\leq 1$ であることがいえる。

3.2　2次超曲面および2次錐に関する補足

ここでは、一般の2 次超曲面について補足する（cf. Griffiths and Harris, 1978; Harris, 1992）。

多項式環 $S=k[x_0,\dots,x_n]$ 内の斉次 2 次多項式

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}x_ix_j$$

で定義される $\mathbb{P}^n$ 内の 2 次超曲面 Q について考える。Q には、対称行列 $A=(a_{i,j})$ が対応している。この A の階数によって分類できる。

Proposition 2. $\mathbb{P}^n$ 内において、2 次超曲面は次の形へ変数変換し帰着できる：

$$Q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 = 0.$$

$r = n+1$ のとき、非特異 2次超曲面で非退化となり、$r < n+1$ のときは、次のような 2 次錐が構成される：$\mathrm{Sing}\, Q \subset Q$ は $(n-r-1)$ 次元線形多様体であり、$\mathbb{P}^{r-1}$ 内の非特異 2 次超曲面上の錐として構成できる。さらに

1. $r = 2$ のとき、$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z}$
2. $r = 3$ のとき、$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
3. $r \geq 4$ のとき、$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z}$

がいえる。

これらの結果より、$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 Q と 2 次錐 Q_0 は変数変換をすることで、次の方程式に帰着できる：

(1) $Q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$

(2) $\mathrm{Sing}\, Q_0 = \{(1,0,0,0)\}$ として、$Q_0 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

となる。また Q_0 上の非特異曲線 C に関しては、次のことがいえる：

Proposition 3. (Hartshorne, 1977). 2 次錐 Q_0 上の次数 d で種数 g の非特異曲線 C は (1) 次数 a の曲面との完全交叉または (2) 次数 d は奇数であるかのいずれかである。(1) については、$d = 2a$ の偶数であり、$g = (a-1)^2$ となる。また (2) については、$d = 2b+1$ の奇数で、$g = b^2 - b$となる。

4　３次曲面について

3 次曲面については，(1) 正規 3 次曲面と (2) 非正規 3 次曲面に分類される。(1) 正規 3 次曲面については

(a) 非特異 3 次曲面 X

(b) 3 次錐 X_0

(c) 孤立特異点 $\mathrm{Sing}\, X_1 = \{(1,0,0,0)\}$ となる正規 3 次曲面

に分類される。(1a) については，Del Pezzo 曲面と呼ばれるクラスになる。まず、この Del Pezzo 曲面についての概説を行う。

4.1　Del Pezzo曲面について

射影曲面 X がDel Pezzo 曲面とは、反標準因子$-K_X$ が非常に豊富なものをいう。主な結果は Hartshorne (1977) などからの引き戻しである。このような曲面は次のように分類される。

Proposition 4. X を次数 d の Del Pezzo 曲面とする。このとき、$3 \leq d \leq 9$ である。また、次のことが成り立つ。

(1) $d = 9$ のとき、これは射影平面 $\mathbb{P}^2$ に同型であり、これは $\mathbb{P}^9$ への 3 次の Veronese 埋め込みとなる。

(2) $d=8$ のとき、これは射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 1 点 Blow-up または $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に同型である。特に、$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ については、Segre 2 重埋め込みになっている。

(3) $3\leq d\leq 6$ のとき、これは射影平面 $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある $9-d$ 点 Blow-up と同型である。

この Del Pezzo曲面の直線束の同型類 Pic X について、次のことがいえる。

Proposition 5. (Hartshorne, 1977). Del Pezzo曲面の直線束の同型類 Pic X は次のようになる：

(1) $d=9$ のとき、$\mathrm{Pic}\,X\cong\mathbb{Z}l$ である。生成元 l は $l^2=1$ となるものである。これは直線を因子としてみたものの同型類である。また超平面切断の同型類 h は (3;) 型である。

(2) $d=8$ のとき

(a) 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 1 点 Blow-up では、$\mathrm{Pic}\,X\cong\mathbb{Z}l\oplus\mathbb{Z}e_1$ となる。これらは

$$l^2=1, l.e_1=0, e_1^2=-1$$

が成り立つ。l は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線 L を X 上への引き戻したものの同型類であり、e_1 は 1 点 P_1 を Blow-up することでできる例外因子 E_1[5] の同型類である。また超平面切断の同型類 h は (3;1) 型である。

(b) $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ のときは、$\mathrm{Pic}\,X\cong\mathbb{Z}l_1\oplus\mathbb{Z}l_2$ となる。これらは

$$l^2=1, l.e_i=0, e_i.e_j=-\delta_{i,j}$$

が成り立つ。また超平面切断の同型類 h は (2,2) 型である。

(3) $3\leq d\leq 7$ のときは、$\mathrm{Pic}\,X\cong\mathbb{Z}l\oplus\mathbb{Z}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}e_r$ となる。これらは

$$l^2=1, l.e_i=0, e_i.e_j=-\delta_{i,j}$$

である。ただし、$r=9-d$ とする。また超平面切断の同型類 h は (3;1,...,1) 型である。

Remark 1. (Hartshorne, 1977). 射影平面 $\mathbb{P}^2$ を r 点 Blow-up して構成される Del Pezzo 曲面上の $(a;b_1,\ldots,b_r)$ 型の有効因子は、$\mathbb{P}^2$ 上の曲線 C で次のようなものに対応している：C は次数 a で、各点 P_iを b_i 重点としてもつ曲線である。このことから、ある完備線形系の部分線形系に対応していることがいえる。

Del Pezzo 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および射影空間内での曲線（有効因子）としての次数 deg$C$ については、次のことがいえる。

Proposition 6. Del Pezzo 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および次数 deg C は次のようになる。

(1) $d=9$ のとき、C を $(a;)$ 型の因子とすると

$$p_a(C)=\binom{a-1}{2}, \deg C=3a$$

である。

(2) $d=8$ のとき

(a) 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 1 点 Blow-up では、C を $(a;b_1)$ 型の因子とすると

$$p_a(C)=\binom{a-1}{2}-\binom{b_1}{2}, \deg C=3a-b_1$$

である。

(b) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のときは、C を (a,b) 型の因子とすると

$$p_a(C) = (a-1)(b-1), \deg C = 2(a+b)$$

である。

(3) $3 \le d \le 7$ のときは、C を $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2} - \sum_{i=1}^{r} \binom{b_i}{2}, \deg C = 3a - b_1 - \cdots - b_r$$

である。ただし、$r = 9 - d$ とする。

これらの結果および Yashiro (2022) からの引き戻しにより、次のことがいえる。

Proposition 7. (Yashiro, 2022). Del Pezzo 曲面上の ACM 直線束は次のように分類できる：

$r=6$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=5$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{6,1})$	$(3m; m,m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,1})$	$(3m; m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,2})$	$(3m; m+1,m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,2})$	$(3m; m+1,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,3})$	$(3m; m,m,m,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,3})$	$(3m; m,m,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,4})$	$(3m; m+1,m,m,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,4})$	$(3m; m+1,m,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,1})$	$(3m+1; m,m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,1})$	$(3m+1; m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,2})$	$(3m+1; m+1,m,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,2})$	$(3m+1; m+1,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,3})$	$(3m+1; m+1,m+1,m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,3})$	$(3m+1; m+1,m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,4})$	$(3m+1; m+1,m+1,m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,4})$	$(3m+1; m+1,m+1,m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,1})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1,m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,1})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,2})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,2})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,3})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,3})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,4})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,4})$	$(3m+2; m+1,m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$

$r=4$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=3$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{4,1})$	$(3m; m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,1})$	$(3m; m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,2})$	$(3m; m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,2})$	$(3m; m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,3})$	$(3m; m,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,3})$	$(3m; m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,4})$	$(3m; m+1,m,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,4})$	$(3m; m+1,m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,1})$	$(3m+1; m,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,1})$	$(3m+1; m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,2})$	$(3m+1; m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,2})$	$(3m+1; m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,3})$	$(3m+1; m+1,m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,3})$	$(3m+1; m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,4})$	$(3m+1; m+1,m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,4})$	$(3m+1; m+1,m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,1})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,1})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,2})$	$(3m+2; m+1,m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,2})$	$(3m+2; m+1,m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,3})$	$(3m+2; m+1,m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,3})$	$(3m+2; m+1,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,4})$	$(3m+2; m+1,m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,4})$	$(3m+2; m,m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$

$r=2$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=1$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{2,1})$	$(3m; m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,1})$	$(3m; m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,2})$	$(3m; m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,2})$	$(3m; m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,3})$	$(3m; m,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,3})$	$(3m; m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,4})$	$(3m; m+1,m-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$		
$(B_{2,1})$	$(3m+1; m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,1})$	$(3m+1; m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,2})$	$(3m+1; m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,2})$	$(3m+1; m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,3})$	$(3m+1; m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$		
$(C_{2,1})$	$(3m+2; m+1,m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,1})$	$(3m+2; m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,2})$	$(3m+2; m+1,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,2})$	$(3m+2; m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,3})$	$(3m+2; m,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$		

$r=0$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$X = \sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{0,1})$	$(3m)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(D_{0,1})$	$(2m, 2m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(B_{0,1})$	$(3m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(E_{0,1})$	$(2m+1, 2m)$ $(m \in \mathbb{Z})$
$(C_{0,1})$	$(3m+2)$ $(m \in \mathbb{Z})$	$(F_{0,1})$	$(2m+1, 2m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$
		$(G_{0,1})$	$(2m+2, 2m)$ $(m \in \mathbb{Z})$

表２　ACM line bundle の型

4.2　その他の３次曲面に関する補足

その他の 3 次曲面 (1b), (1c), (2) についての結果を述べる。

(1b) について、3 次錐 X_0 は変数変換を行うことで､次の斉次多項式に帰着できる：

$$X_0 : F(x_0, x_1, x_2, x_3) = G_3(x_1, x_2, x_3)$$

ただし、$\operatorname{Sing} X_0 = \{(1,0,0,0)\}$ であり、G_3 は既約 3 次斉次多項式で斉次座標系 $[x_1, x_2, x_3]$ をもつ射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線を表す。

(1c) については、$\operatorname{Sing} X_1 = \{(1,0,0,0)\}$ であり、3 次曲面 X_1 は変数変換を行うことで､次の斉次多項式に帰着できる：

$$X_1 : F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 G_2(x_1, x_2, x_3) + G_3(x_1, x_2, x_3)$$

ただし、G_2, G_3 はそれぞれ 2 次および 3 次の斉次多項式であり、G_2とG_3 は共通成分を持たない。

(2) の非正規3 次曲面X_1 については､次のことがいえる。

Proposition 8. (Lee et al., 2011). 非正規 3 次曲面 X_1 は変数変換を行うことで $\operatorname{Sing} X_1 = V(x_0, x_1)$ とでき､斉次多項式 $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ は次のように表される：

(1) k の標数が 2 でも 3 でもないとき

(a) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_1^2x_3$ または (b) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_0x_1x_3$ となる。

(2) k の標数が 2 のとき

(a) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_1^2x_3$, (b) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_1^2x_2 + x_0x_1x_3$または (c) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_0x_1x_3$ となる。

(3) k の標数が 3 のとき

(a) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_1^2x_3$, または (b) $F = x_0^2x_2 + x_1^3 + x_0x_1x_3$ となる。

5　正規有理曲線について

この節では､有理曲線の中で基本的である正規有理曲線について概説する｡これらの結果は､Eisenbud (1995)、Eisenbud (2006)、Hartshorne (1977)、Griffiths and Harris (1978)、Harris (1992) などからの引き戻しである｡以下、$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[t_0, t_1]$ とする。すなわち、$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle t_0, t_1 \rangle$ とする。射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle t_0^n, t_0^{n-1}t_1, \ldots, t_0t_1^{n-1}, t_1^n \rangle$$

を考える｡この基底により構成される射 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり､その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n 次の有理曲線となる。これを正規有理曲線という｡この曲線の定義イデアル I_C は $\binom{n}{2}$個の 2 次斉次多項式で生成される。別の表現として曲線 C の定義イデアル I_C は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい。これは、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ を Segre 埋め込みした射影多様体を線形多様体で切断したものである。実際に $X = \sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ の定義イデアル I_X は $2 \times n$ 行列

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-1} \end{pmatrix}$$

の $2{\times}2$ 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M)$ となる。さらに、線形多様体 H は n 次元で

$$H : x_{n+i-1} - x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

で定義される。これより $C = X \cap H$ および、$I_C = I_X + I_H$ がいえる。

正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の極小自由分解については、Eagon-Northcott 複体が対応する：

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-r-1)^{\oplus r \binom{n}{r+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus \binom{n}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_C \longrightarrow 0.$$

ただし、$r \geq 1$ とする。これより Betti 数 $\beta_{i,j}$ は、$\beta_{0,0} = 1$

$$\beta_{i,i+1} = i \binom{n}{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)$$

であり、それ以外は $\beta_{i,j} = 0$ である。

Example 1. 正規有理曲線の簡単な例として、$v_2 : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^2, t_0 t_1, t_1^2] \in \mathbb{P}^2$ を考えると、平面 2 次曲線 $C : x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ が定義できる。

Example 2. 同様に、$v_3 : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] \in \mathbb{P}^3$ を考えると、ねじれ 3 次曲線 C が定義できる。これは $C : x_0 x_2 - x_1^2 = 0, x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0, x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ により定義される。

より一般的な結果として、Rational Normal Scroll の極小自由分解を考えることができる。

Rational Normal Scroll とは、$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 ε の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである。具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して、$N = \sum_{i=1}^n a_i + n - 1$ とおいて埋め込むものである。$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える。$D = \sum_{i=1}^n a_i + n$ として $2 \times D$ 行列

$$M_{D,1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,a_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,a_n} \end{array} \right)$$

の $2{\times}2$ 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい。$S = k[x_{1,0}, \ldots, x_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i \binom{N}{i+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である。

Remark 2. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1 > 0)$ のとき、$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) \cong \mathbb{P}^1$ であり、埋め込みは $X \subset \mathbb{P}^{a_1}$ となるから､正規有理曲線を意味する。

Remark 3. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)(0 < a_1 \leq a_2)$ のとき､$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ に対して、$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-a_2)$ とすると、$X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる。これは、Hirzebruch 曲面に同型であることがいえる。

6　正規楕円曲線について

種数 1 の非特異代数曲線を楕円曲線という。以下、C を楕円曲線とし、$P_0 \in C$ とする。C 上の次数 n の因子 $D = nP_0(n \geq 3)$ に対応する埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ における像は n 次曲線となる。これを正規楕円曲線という。

$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_0) = \langle 1 \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(2P_0)) = \langle 1, f \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(3P_0)) = \langle 1, f, g \rangle$ とすると Riemann-Roch の定理より

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \langle 1, f, \ldots, f^i, g, gf, \ldots, gf^j \rangle \ \ (0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, 0 \leq j \leq \lfloor (n-3)/2 \rfloor)$$

と基底を選ぶことができる。$n = 3$ のとき、$\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線が得られる。$n = 4$ のときは、4 次曲線となり、2 つの 2 次曲面の完全交叉となる。

この関係式を導出するために、Rational Normal Scroll Surface を構成する。上記の基底の構成を利用して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & f^{a-1} & g & \cdots & f^{b-1} \\ f & \cdots & f^a & gf & \cdots & f^b \end{array}\right)$$

を考えると、$2 \times (a+b)$ 行列

$$M(\mathcal{O}_C(2P_0), \mathcal{O}_C((n-2)P_0)) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,b-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,b} \end{array}\right)$$

が構成される。ただし、$a = \lfloor n/2 \rfloor, b = \lfloor (n-3)/2 \rfloor$ であり､$\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + 1 = n$ である。

この 2×2 小行列式全体で定義される $\mathbb{P}^{n-1}(n \geq 4)$ 内の射影曲面が定義できる。

1. $n = 4$ のときは､$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)) \to Q_0 \subset \mathbb{P}^3$ （Q_0 は 2 次錐）となる。[6)]
2. $n \geq 5$ のとき、埋め込み $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))) \to X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が構成できて､X は非特異射影曲面（次数 $n-1$ の Hirzebruch 曲面）となる。

先述の通り X は Hirzebruch 曲面に同型であり､その Picard 群は

$$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$$

で与えられる。ただし、h は超平面切断 $H(\cong \mathbb{P}^1)$に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の同型類、f は $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 上のファイバーに対応する直線束 $\mathcal{O}_X(F)(F \cong \mathbb{P}^1)$ の同型類であり、$h^2 = n-1, h.f = 1, f^2 = 0$ であ

る。この曲面上において、正規楕円曲線 C に対応する X 上の因子は $C = 2H - (n-3)F$ である。すなわち、I_X の生成系から、I_C の生成系を構成することを考える。より一般的には、X の極小自由分解を利用して、C の極小自由分解を構成することとなる。X の斉次座標環 S_X 上での C の定義イデアルを $I_{C/X}$ とし､その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}} = \mathcal{O}_X((n-3)F - 2H) = \mathcal{O}_X((n-3)F)(-2)$$

を意味する｡これより､$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((n-3)F)(m))$$

の極小自由分解を -2 シフトしたものだと考えられる｡これは Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる。

Theorem 4. (Hoa et al., 1991; Hoa (1993). $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ を $n+1$ 次の正規楕円曲線とする｡このとき､$S = k[z_0, \ldots, z_n]$ における X の極小自由分解は次で与えられる。

$$0 \to S(-n-1) \to S(-n+1)^{\oplus (n-2) + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}} \to S(-i-1)^{\oplus i \begin{pmatrix} n-1 \\ i+1 \end{pmatrix} + (n-i-1) \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}} \to \cdots$$
$$\to S(-2)^{\oplus \binom{n-1}{2} + (n-2)} \to S \to S_C \to 0.$$

また、Betti 数 $\beta_{i,j}$ について、$\beta_{0,0} = 1$ であり

$$\beta_{i,i+1} = i \binom{n-1}{i+1} + (n-i-1) \binom{n-1}{i-1} \, (1 \leq i \leq n-2), \beta_{n-1,n+1} = 1$$

であり、その他は $\beta_{i,j} = 0$ となる。

7　Theorem 1 の証明の詳細

以下、Naito (2002) の証明について､順次示していく｡まず次数の関係から $d \geq 5$ のとき、$\beta_{1,2} \leq 1$ となることに注意しておく。

- $\underline{(d,g) = (3,0)}$ のとき、C は 2-regular となる｡また $h^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(-1)) = 2 \neq 0$ より、1-regular ではない。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2 + B_3 + B_4 = 1 \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 = 0 \\ 2^2 B_2 + 3^2 B_3 + 4^2 B_4 = -6 \\ 2^3 B_2 + 3^3 B_3 + 4^3 B_4 = -30 \end{cases}$$

である。B_2, B_3, B_4について解くと

$$B_2 = 3, B_3 = -2, B_4 = 0$$

である。また B_2, B_3, B_4 は

$$B_2 = \beta_{1,2}, B_3 = \beta_{1,3} - \beta_{2,3}, B_4 = \beta_{1,4} - \beta_{2,4} + \beta_{3,4}$$

である。2-regular であるから$\beta_{1,3}=\beta_{1,4}=\beta_{2,4}=0$となり，Betti Sequence は $(3|2|0)$となる。これは Type (1) である。

• $\underline{(d,g)=(4,0)}$のとき、C は 3-regular となる。また $h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(1))=1\neq 0$ より、2-regular ではない。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5=-8 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5=-42 \end{cases}$$

である。よって、B_2,B_3,B_4,B_5 について解くと

$$B_2=1,B_3=3,B_4=-4,B_5=1$$

である。また B_2,B_3,B_4,B_5 は

$$B_2=\beta_{1,2},B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3},B_4=\beta_{1,4}-\beta_{2,4}+\beta_{3,4},B_5=\beta_{1,5}-\beta_{2,5}+\beta_{3,5}$$

である。3-regular であるから $\beta_{1,4}=\beta_{1,5}=\beta_{2,5}=0$ となる。Lemma 2 より、$\beta_{1,2}=1$ のとき $\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ であるから、Betti Sequence は $(1,3|0,4|0,1)$ となる。これは Type (2) である。

• $\underline{(d,g)=(4,1)}$ のとき、C は 3-regular となる。また $h^2(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C)=1\neq 0$ より、2-regular ではない。Lemma 1より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5=-8 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5=-48 \end{cases}$$

である。よって、B_2,B_3,B_4,B_5 について解くと

$$B_2=2,B_3=0,B_4=-1,B_5=0$$

であり

$$B_2=\beta_{1,2},B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3},B_4=\beta_{1,4}-\beta_{2,4}+\beta_{3,4},B_5=\beta_{1,5}-\beta_{2,5}+\beta_{3,5}$$

となる。3-regular であるから $\beta_{1,4}=\beta_{1,5}=\beta_{2,5}=0$ となる。Lemma 2 より、$\beta_{1,2}=2$ のとき$\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ であるから、Betti Sequence は $(2,0|0,1|0,0)$ となる。これは Type (3) である。

• $\underline{(d,g)=(5,0)}$ のとき、C は 4-regular となる。また $d\geq 5$ より、$\beta_{1,2}\leq 1$ である。さらに、コホモロジー群の完全列

$$0\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(2))\to H^0(C,\mathcal{O}_C(2))\to H^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))\to 0$$

より

$$\beta_{1,2}=h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))=h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))-1$$

だから、$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))\neq 0$ となり、C は 3-regular ではない。ここから$\beta_{1,2}$ について、次のように場合分けをおこなう。

(1) $\beta_{1,2}=0$ のとき、Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5+6B_6=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5+6^2B_6=-10 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5+6^3B_6=-54 \\ B_2=0 \end{cases}$$

である。B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 について解くと

$$B_2=0,B_3=4,B_4=-2,B_5=-2,B_6=1$$

である。また B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 は

$B_2=\beta_{1,2},B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3},B_4=\beta_{1,4}-\beta_{2,4}+\beta_{3,4},B_5=\beta_{1,5}-\beta_{2,5}+\beta_{3,5},B_6=\beta_{1,6}-\beta_{2,6}+\beta_{3,6}$

である。仮定 $\beta_{1,2}=0$ より、$\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ がいえる。また C は、4-regular より $\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,6}=0$ となる。これより、$\beta_{1,3}=4$ がいえる。$\beta_{1,3}=4$ であることから、$\beta_{2,4}\leq 3,\beta_{3,5}=0$ であることがいえる。さらに Castelnuovo の結果より、曲線 C は 4-secant line を 1 本持つことがいえる。これより $\beta_{1,4}\geq 1$であることがいえる。$\beta_{1,4}=\beta_{2,4}-2\geq 1$ から、$\beta_{2,4}=3$ がいえる。よって、$\beta_{1,4}=1$ もいえる。よって、$\beta_{2,5}=0$ であるから、Betti Sequence は (0,4,1|0,3,2|0,0,1) となる。これは Type (4) である。

(2) $\beta_{1,2}=1$ のとき、Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5+6B_6=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5+6^2B_6=-10 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5+6^3B_6=-54 \\ B_2=1 \end{cases}$$

である。B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 について解くと

$$B_2=1,B_3=0,B_4=4,B_5=-6,B_6=2$$

であり、

$B_2=\beta_{1,2},B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3},B_4=\beta_{1,4}-\beta_{2,4}+\beta_{3,4},B_5=\beta_{1,5}-\beta_{2,5}+\beta_{3,5},B_6=\beta_{1,6}-\beta_{2,6}+\beta_{3,6}$

である。$\beta_{1,2}=1$ であるから、Lemma 2 より $\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ である。よって、$\beta_{1,3}=0$ となり、$\beta_{2,4}=\beta_{3,5}=0$ である。C は 4-regular より、$\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,6}=0$ となる。これらより、$\beta_{1,4}=4,\beta_{2,5}=6,\beta_{3,6}=2$ であるから、Betti Sequence は (1,0,4|0,0,6|0,0,2) となる。これは Type (5) である。

• $\underline{(d,g)=(5,1)}$ のとき、C は 4-regular となる。さらに任意の 2 次曲面（非特異 2 次曲面と 2 次錐）上の因子で一致するものは存在しない。よって、$\beta_{1,2}=0$ がいえる。さらに

$$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))=h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(2))+h^0(C,\mathcal{O}_C(2))=0,$$
$$h^2(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(1))=h^1(C,\mathcal{O}_C(1))=0$$

より、C は 3-regular であることがいえる。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 1 \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 = 0 \\ 2^2B_2 + 3^2B_3 + 4^2B_4 + 5^2B_5 = -10 \\ 2^3B_2 + 3^3B_3 + 4^3B_4 + 5^3B_5 = -60 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

である。B_2, B_3, B_4, B_5 について解くと

$$B_2 = 0, B_3 = 5, B_4 = -5, B_5 = 1$$

である。また B_2, B_3, B_4, B_5 は

$$B_2 = \beta_{1,2}, B_3 = \beta_{1,3} - \beta_{2,3}, B_4 = \beta_{1,4} - \beta_{2,4} + \beta_{3,4}, B_5 = \beta_{1,5} - \beta_{2,5} + \beta_{3,5}$$

である。3-regular であるから$\beta_{1,4} = \beta_{1,5} = \beta_{2,5} = 0$ である。また $\beta_{1,2} = 0$ だから、Lemma 2 より $\beta_{2,3} = \beta_{3,4} = 0$ となる。よって、$\beta_{1,3} = \beta_{2,4} = 5$ となるから、Betti Sequence は (0,5|0,5|0,1) となる。これは Type (6) である。

- $\underline{(d,g) = (5,2)}$ のとき、C は 4-regular となる。また $d \geq 5$ より、$\beta_{1,2} \leq 1$ であるが

$$\beta_{1,2} = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(2)) + h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) + 1 \geq 1$$

より、$\beta_{1,2} = 1, h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = 0$ である。さらに

$$h^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(1)) = h^1(C, \mathcal{O}_C(1)) = 0$$

より、C は 3-regular であることがいえる。よって Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 1 \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 = 0 \\ 2^2B_2 + 3^2B_3 + 4^2B_4 + 5^2B_5 = -10 \\ 2^3B_2 + 3^3B_3 + 4^3B_4 + 5^3B_5 = -66 \end{cases}$$

である。よって、B_2, B_3, B_4, B_5 について解くと

$$B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = -2, B_5 = 0$$

であり

$$B_2 = \beta_{1,2}, B_3 = \beta_{1,3} - \beta_{2,3}, B_4 = \beta_{1,4} - \beta_{2,4} + \beta_{3,4}, B_5 = \beta_{1,5} - \beta_{2,5} + \beta_{3,5}$$

である。$\beta_{1,2} = 1$ より、$\beta_{2,3} = \beta_{3,4} = 0$ となる。また C が 3-regular より、$\beta_{1,4} = \beta_{1,5} = \beta_{2,5} = 0$ となる。よって、$\beta_{1,3} = 2, \beta_{2,4} = 2, \beta_{3,5} = 0$ となるから、Betti Sequence は (1,2|0,2|0,0) となる。これは Type (7) である。

- $\underline{(d,g) = (6,0)}$ のとき、C は 5-regular となる。また $d \geq 5$ より、$\beta_{1,2} \leq 1$ である。ここで、$\beta_{1,2}$ について、場合分けを行う。

(1) $\beta_{1,2} = 0$ のとき、$\beta_{1,3} = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ であり

$$h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = \beta_{1,3} - 1$$

がいえる。また

$$h^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = h^1(C, \mathcal{O}_C(1)) = 0$$

である。ここで、$\beta_{1,3}$ の値を調べる。

(i) $\beta_{1,3} = 1$ のとき、C は 4-regular となる。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5+6B_6=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5+6^2B_6=-12 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5+6^3B_6=-66 \\ B_2=0 \end{cases}$$

である。よって、B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 について解くと

$$B_2=0, B_3=1, B_4=6, B_5=-9, B_6=3$$

であり

$$B_2=\beta_{1,2}, B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3}, B_j=\beta_{1,j}-\beta_{2,j}+\beta_{3,j}, \text{ for } 4\leq j\leq 6$$

である。$\beta_{1,2}=0, \beta_{1,3}=1$ より、$\beta_{2,3}=\beta_{2,4}=\beta_{3,4}=\beta_{3,5}=0$ となる。これより、$\beta_{1,4}=6$ である。また C が 4-regular より、$\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,6}=0$ となる。この結果より、$\beta_{2,5}=9, \beta_{3,6}=3$ がいえるから、Betti Sequence は (0,1,6|0,0,9|0,0,3) となる。これは Type (8) である。

(ii) $\beta_{1,3}=2$ のとき、C は 4-regular ではない。このとき C は 5-secant line L をもつ。$C'=C\cup L$ とし、C 上の因子 $D=C.L$ で定める。このとき、$\deg C=6$, $\deg D=5$ であることに注意すると、層の完全系列

$$0\to\mathcal{O}_C(-D)\to\mathcal{O}_C\to\mathcal{O}_D\to 0$$

より、$m\geq 1$ において $H^1(C,\mathcal{O}_C(m)\otimes\mathcal{O}_C(-D))=0$ がいえる。よって

$$0\to H^0(C,\mathcal{O}_C(m)\otimes\mathcal{O}_C(-D))\to H^0(C,\mathcal{O}_C(m))\to H^0(D,\mathcal{O}_D(m))\to 0$$

が完全となる。また Mayer-Vietoris Sequence

$$0\to H^0(C',\mathcal{O}_{C'}(m))\to H^0(C,\mathcal{O}_C(m))\oplus H^0(L,\mathcal{O}_L(m))\to H^0(D,\mathcal{O}_D(m))\to H^1(C',\mathcal{O}_{C'}(m))\to 0$$

より、$h^1(C',\mathcal{O}_{C'})=4$であり、$m\geq 1$ に対して $h^1(C',\mathcal{O}_{C'}(m))=0$ がいえる。さらに

$$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_{C'}(3))=h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_{C'}(3))-h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(3))+h^0(C',\mathcal{O}_{C'}(3))=2-20-18=0,$$

$$h^2(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_{C'}(2))=h^1(C',\mathcal{O}_{C'}(2))=0$$

より、C' は 4-regular となる。4-regular だから $j\geq 5$ に対して、$\beta_{1,j}=0$ となる。これより C' は次数 4 以下の曲面に含まれる。よって、C' と C の Betti Sequence は $\beta_{1,5}, \beta_{2,6}, \beta_{3,7}$ を除き一致する。C' の Betti Sequence は (0,2,2|0,0,4|0,0,1) だから、C のBetti Sequence は (0,2,2,1|0,0,4,2|0,0,1,1) となる。これは Type (9) である。

(iii) $\beta_{1,3}\geq 3$ のとき、$V\subset H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))$ を $\dim_K V=3$ の部分ベクトル空間としてとり、積写像

$$\Phi: H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))\otimes V\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(4))$$

を考える。このとき $\dim\ker\Phi\geq 2$ となるが、このようには取ることはできない。

よって $\beta_{1,3}\geq 3$ の場合は存在しない。

(2) $\beta_{1,2}=1$ のとき、非特異 2 次曲面 Q 上の (1,5) 型因子 C として考えることができる。

層の完全系列

$$0\to\mathcal{I}_Q\to\mathcal{I}_C\to\mathcal{I}_{C/Q}\to 0$$

より、次が完全である。

$$0\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_Q(3))\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))\to H^0(Q,\mathcal{I}_{C/Q}(3))\to 0.$$

これより

$$h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))=h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_Q(3))+h^0(Q,\mathcal{I}_{C/Q}(3))=4.$$

がいえる。ここで、$H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))=kL_0\oplus kL_1\oplus kL_2\oplus kL_3$ とすると、$H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(2))=kQ$ であり

$$H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))=kQL_0\oplus kQL_1\oplus kQL_2\oplus kQL_3$$

がいえる。このことより $\beta_{1,3}=0$ である。また、$B_2,\dots,B_7$ を求めると

$$B_2=1,B_3=t-3,B_4=-4t+12,B_5=6t-13,B_6=-4t+4,B_7=t$$

とできる。ただし、t は任意の自然数である。$\beta_{1,2}=1$ より $\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ となり、$\beta_{1,3}=0$より、$\beta_{2,4}=0,\beta_{3,7}=t=3$となる。よって、 $\beta_{1,4}=0$となる。補題より、$\beta_{2,3}=\beta_{2,4}=\beta_{2,5}=\beta_{3,4}=\beta_{3,5}=\beta_{3,6}=0$となるから、 $\beta_{2,6}=8$となる。CのBetti Sequenceは (1,0,0,5|0,0,0,8|0,0,0,3) となる。これは Type (10) である。

- $\underline{(d,g)=(6,1)}$ のとき、C は 5-regular となる。任意の 2 次曲面上に C は存在しないから、$\beta_{1,2}=0$ がいえる。さらに

$$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))=\beta_{1,3}-2$$

がいえる。

(1) $\beta_{1,3}=2$ のとき、C は 4-regular となる。Lemma 1 より

$$\begin{cases}B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=1\\2B_2+3B_3+4B_4+5B_5+6B_6=0\\2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5+6^2B_6=-12\\2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5+6^3B_6=-72\end{cases}$$

となる。よって、B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 について解くと

$$B_2=0,B_3=2,B_4=3,B_5=-6,B_6=2$$

であり

$$B_2=\beta_{1,2},B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3},B_j=\beta_{1,j}-\beta_{2,j}+\beta_{3,j},\ \text{for}\ 4\le j\le 6$$

である。$\beta_{1,2}=0,\beta_{1,3}=2$より、$\beta_{2,3}=\beta_{2,4}=\beta_{3,4}=\beta_{3,5}=0$ である。これより $\beta_{1,4}=3$ である。また C が 4-regularより、$\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,6}=0$ となるから、$\beta_{2,5}=6,\beta_{3,6}=2$ となる。よって、Betti Sequence は (0,2,3|0,0,6|0,0,2) となる。これは Type (11) である。

(2) $\beta_{1,3}=3$ のとき、$V\subset H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))$を $\dim_K V=3$ の部分ベクトル空間としてとり、積写像

$$\Phi:H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))\otimes V\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(4))$$

を考える。このとき $\dim\ker\Phi\ge 2$ となるが、このようには取ることはできない。よって $\beta_{1,3}\ge 3$ の場合は存在しない。

- $\underline{(d,g)=(6,2)}$ のとき、C は 5-regular となる。任意の 2 次曲面上に C は存在しないから、$\beta_{1,2}=0$ がいえる。さらに

$$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))=\beta_{1,3}-3$$

がいえる。同様の議論で次のことがいえる。

(1) $\beta_{1,3}=3$のとき、C は 4-regular となる。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5+6B_6=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5+6^2B_6=-12 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5+6^3B_6=-78 \end{cases}$$

となる。

よって、B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 について解くと

$$B_2=0, B_3=3, B_4=0, B_5=-3, B_6=1$$

であり

$$B_2=\beta_{1,2}, B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3}, B_j=\beta_{1,j}-\beta_{2,j}+\beta_{3,j},\ \text{for}\ 4\le j\le 6$$

である。$\beta_{1,2}=0, \beta_{1,3}=3$ より、$\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=\beta_{3,5}=0, \beta_{2,4}\ge 1$ である。また C が4-regular より、$\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,6}=0$ となり、Castelnuovo の結果から、曲線 C は 4-secant line を 1 本持つことがいえる。これより $\beta_{1,4}\ge 1$ であることがいえる。よって、$\beta_{1,4}=\beta_{2,4}=1$ がいえて、$\beta_{2,5}=3, \beta_{3,6}=1$ だから、Betti Sequence は (0,3,1|0,1,3|0,0,1) となる。これは Type (12) である。

(2) $\beta_{1,3}\ge 4$ のとき、$V\subset H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(3))$を $\dim_K V=4$ の部分ベクトル空間としてとり、積写像

$$\Phi: H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))\otimes V\to H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(4))$$

を考える。このとき $\dim\ker\Phi\ge 3$ となるが、このようには取ることはできない。

よって $\beta_{1,3}\ge 4$ の場合は存在しない。

- $\underline{(d,g)=(6,3)}$ のとき、C は 5-regular となる。$d\ge 5$ より $\beta_{1,2}\le 1$ となる。

(1) $\beta_{1,2}=0$ のとき、C は 3-regular となる。実際に

$$h^1(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(2))=h^0(C,\mathcal{O}_C(2))-h^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(2))=10-10=0,$$
$$h^2(\mathbb{P}^3,\mathcal{I}_C(1))=h^1(C,\mathcal{O}(1))=0$$

となる。Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2+B_3+B_4+B_5=1 \\ 2B_2+3B_3+4B_4+5B_5=0 \\ 2^2B_2+3^2B_3+4^2B_4+5^2B_5=-12 \\ 2^3B_2+3^3B_3+4^3B_4+5^3B_5=-78 \\ B_2=0 \end{cases}$$

となる。よって、B_2, B_3, B_4, B_5 について解くと

$$B_2=0, B_3=4, B_4=-3, B_5=0$$

であり

$$B_2=\beta_{1,2}, B_3=\beta_{1,3}-\beta_{2,3}, B_4=\beta_{1,4}-\beta_{2,4}+\beta_{3,4}, B_5=\beta_{1,5}-\beta_{2,5}+\beta_{3,5}, B_6=\beta_{1,6}-\beta_{2,6}+\beta_{3,6}$$

である。C が 3-regular より、$\beta_{1,4}=\beta_{1,5}=\beta_{1,6}=\beta_{2,5}=\beta_{2,6}=\beta_{3,6}=0$ である。また $\beta_{1,2}=0$ より $\beta_{2,3}=\beta_{3,4}=0$ となる。よって、$\beta_{1,3}=4, \beta_{2,4}=3, \beta_{3,5}=0$ となり、Betti Sequence は (0,4|0,3|0,0) となる。これは Type (13) である。

(2) $\beta_{1,2}=1$ のとき、Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 1 \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 = 0 \\ 2^2B_2 + 3^2B_3 + 4^2B_4 + 5^2B_5 = -12 \\ 2^3B_2 + 3^3B_3 + 4^3B_4 + 5^3B_5 = -78 \\ B_2 = 1 \end{cases}$$

となる。よって、B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 について解くと

$$B_2 = 1, B_3 = 0, B_4 = 3, B_5 = -4, B_6 = 1$$

であり、$\beta_{1,2} = 1$ より、$\beta_{2,3} = \beta_{3,4} = 0$ である。よって、$\beta_{1,3} = 0$ となって、$\beta_{3,4} = \beta_{3,5} = 0$ となる。また、C は 4-regular となる。実際に

$$h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(3)) - h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(3)) + h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 16 - 20 + 4 = 0,$$
$$h^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = h^1(C, \mathcal{O}(2)) = 0$$

となる。よって、$\beta_{1,5} = \beta_{2,6} = \beta_{3,7} = 0$ となり、Betti Sequence は (1,0,3|0,0,4|0,0,1) となる。これは Type (14) である。

- $\underline{(d, g) = (6, 4)}$のとき、$C$ は 5-regular となる。$d \geq 5$ より $\beta_{1,2} \leq 1$ となる。また

$$\beta_{1,2} = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) \geq h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(2)) = 10 - 9 = 1$$

より、$\beta_{1,2} = 1$ となる。ここで C は非特異 2 次曲面 Q 上の (3,3) 型因子で実現できる。さらに層の完全列

$$0 \to \mathcal{I}_Q \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{I}_{C/Q} \to 0$$

より

$$h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 5$$

だから、$\beta_{1,3} = 1$ がいえる。また

$$h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = h^1(Q, \mathcal{I}_{C/Q}(3)) = 0, h^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = h^1(C, \mathcal{O}_C(2)) = 0$$

から、C は 4-regular であることがいえる。また、Lemma 1 より

$$\begin{cases} B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = 1 \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + 5B_6 = 0 \\ 2^2B_2 + 3^2B_3 + 4^2B_4 + 5^2B_5 + 6^2B_6 = -12 \\ 2^3B_2 + 3^3B_3 + 4^3B_4 + 5^3B_5 + 6^3B_6 = -90 \\ B_2 = 1 \end{cases}$$

となる。B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 について解くと

$$B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 0, B_5 = -1, B_6 = 0$$

となる。よって、C の Betti Sequence は (1,1,0|0,0,1|0,0,0) となる。これは Type (15) である。

8　例の構成

ここでは Naito (2002) に基づいて、埋め込みを構成する。

- $(d, g) = (5, 0)$ のとき Type (4) については、$\varphi : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^5, t_0^4t_1 + t_0^3t_1^2, t_0t_1^4, t_1^5] \in \mathbb{P}^3$ であり，これは $\mathbb{P}^5$ 内の正規有理曲線C'を、線形空間 $\Lambda = V(x_1 - x_2, x_3)$ を中心に射影したものである。すなわ

ち、$\varphi = \pi_\Lambda \circ v_5$である。これは Del Pezzo曲面内の (3;1,1,1,1,0,0) 型因子である。

- $(d, g) = (5, 0)$ のとき Type (5) については、$\varphi : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^5, t_0^4 t_1, t_0 t_1^4, t_1^5] \in \mathbb{P}^3$ であり、これは $\mathbb{P}^5$ 内の正規有理曲線 C' を、線形空間 $\Lambda = V(x_2, x_3)$ を中心に射影したものである。

すなわち、$\varphi = \pi_\Lambda \circ v_5$ である。また、これは非特異 2 次曲面 Q 内の (1,4) 型因子である。

- $(d, g) = (6, 0)$ のとき Type (10) については、$\varphi : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^6, t_0^5 t_1, t_0 t_1^5, t_1^6] \in \mathbb{P}^3$ であり、これは $\mathbb{P}^6$ 内の正規有理曲線 C' を、線形空間 $\Lambda = V(x_2, x_3, x_4)$ を中心に射影したものである。すなわち、$\varphi = \pi_\Lambda \circ v_6$ である。 また、これは非特異 2 次曲面 Q 内の (1,5) 型因子である。

９　結び

本研究ノートでは Naito (2002) を基に $\mathbb{P}^3$ 内の曲線の極小自由分解を考察したが、これらの曲線はある射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内に埋め込まれた曲線の射影で構成される。実際に、射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の非特異射影曲線は、$\mathbb{P}^3$ 内の曲線に同型として埋め込むことができる。その際、Secant Variety の構成・考察が必要となる。より一般的に、n 次元非特異射影多様体は $\mathbb{P}^{2n+1}$ 内の射影空間に埋め込むことができる。Secant Variety の具体的な定義多項式の決定は興味深く、現在 Zak (1993)、Fisher (2006)、Bothmer and Hulek (2003) などの文献を中心に考察を始めている。また一方で、$\mathbb{P}^3$ 内の曲線は $\mathbb{P}^3$ 上の階数 2 のベクトル束に対応している。それらは Hartshorne (1978)、Okonek et al. (1980) などで考察されてきた。具体的に曲線の次数 d と種数 g の組 (d, g) を与えたとき、どのようなベクトル束が対応しているかも興味深い。1 つ 1つ考察を進めていこうと考えている。

謝辞

本研究ノートを執筆するにあたり、日本経済大学論集編集委員会の方々からご指導いただきました。この場を借りて、厚く御礼申し上げます。

注

1) 今回、非退化曲線を考察するため、$\beta_{1,1} = 0$ となる。
2) Naito (2002) の表記と違うことに注意する。
3) (2) ～(6) については、順次仮定を強めたものと考察できる。また (7) の類似として、「$\beta_{1,2} = 0, \beta_{1,3} = 4$ ならば $\beta_{2,4} \leq 3, \beta_{3,5} = 0$」も導くことができる。この他にも計算上有益と思われるものは補題として整理する必要がある。
4) この仮定がないと, 対称行列と 2 次形式との関係性や階数による非特異判定などができなくなる。
5) E が例外直線とは、$E^2 = -1$ かつ $E \cong \mathbb{P}^1$ が成り立つものである。非特異曲面上の 1 点をBlow-upすることで構成される。
6) この射は、特異点 $O \in Q_0$ を中心とした Blow-up を意味する。

文献一覧

Bothmer, H.C.V., & Hulek, K. (2003). *Geometric syzygies of elliptic normal curves and their secant varieties* (preprint). arXiv:math/0304331.

Eisenbud, D. (1995). *Commutative algebra: With a view toward algebraic geometry* (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150). New York, NY: Springer.

——— (2006). *The Geometry of Syzygies: A second course in algebraic geometry and commutative algebra* (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 229). New York, NY: Springer.

Eisenbud, D., Mark, G., Hulek, K., & Popescu, S. (2005). Restricting linear syzygies: Algebra and geometry. *Compositio Mathematica*, 141(6), pp. 1460–1478.

Fisher, T. (2006). *The higher secant varieties of an elliptic normal curve* (preprint). https://www.dpmms.cam.ac.uk/~taf1000/papers/hsecenc.html

Griffiths, P., & Harris, J. (1978). *Principles of algebraic geometry*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Gruson, L., Lazarsfeld, R., & Peskine, C. (1983). On a Theorem of Castelnuovo, and the Equations Defining Space Curves. *Inventiones mathematicae*, 72, pp. 491–506.

Halphen, G.H. (1882). Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. *Extrait du Journal de l'É cole Polytechnique, 52*, Gauthier.

Harris, J. (1992). *Algebraic Geometry: A first course* (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 133): New York, NY: Springer.

Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry* (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52): New York, NY: Springer.

——— (1978). Stable vector bundles of rank 2 on P3. *Mathematische Annalen*, 238, pp. 229–280.

Hoa, L.T. (1993). *On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3), pp. 241–250.

Hoa, L.T., Stückrad, J., & Vogel, W. (1991). Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2), pp. 203–231.

Lee, W., Park, E., & Schenzel, P. (2011). *On the classification of non-normal cubic hypersurfaces. Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(8), pp. 2034–2042.

Naito, H. (2002). Minimal free resolution of curves of degree 6 or lower in the 3-dimensional projective space. *Tokyo Journal of Mathematics*, 25(1), pp. 191–196.

Noether, M. (1882). Zur grundlegung der theorie der algebraischen raumcurven. J*ournal für die reine und angewandte Mathematik*, 93, pp. 271–318.

Okonek, C., Schneider, M., & Spindler, H. (1980). Holomorphic vector bundles and the geometry of $\mathbb{P}$n. In Okonek, C., Schneider, M., & Spindler, H. (Eds.). Vector bundles on complex projective spaces (Progress in Mathematics, Vol. 3), New York, NY: Springer, pp. 1-138.

Okonek, C., Schneider, M., & Spindler, H. (1980). Stability and moduli Spaces. In Okonek, C., Schneider, M., & Spindler, H. (Eds.). Vector bundles on complex projective spaces (Progress in Mathematics, Vol. 3), New York, NY: Springer, pp. 139-373.

Yashiro, S. (2022). *Minimal free resolution of ACM curves on Del Pezzo Surfaces* (Preprint).

Zak, F.L. (1993). *Tangents and secants of algebraic varieties: Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society.