混　　合　　論

——混合に関する演算の記号化とその幾何学への応用——

永　松　鶴　喜

目　　次

序　論
第１章　組成式
第２章　濃度型組成式
第３章　混合方程式
第４章　幾何学への応用

序　　論

混合物の濃度に関する計算（つまるところ,「混合」に関する計算であるが）にはいろいろのジャンルがある。例えば一定濃度の塩酸を水で薄めて，希望する濃度の希塩酸を作るために行うような最も普通に見られる単純な計算もあれば，食塩と水の混合物のように，溶媒（水）に溶け得る溶質（食塩）の量に一定の限界があり，これを越えると，溶質が結晶となって分離・折出する類の溶液から希望する量の個体の結晶を得るためには，どれだけの水を蒸発・除去すべきかを求めるような，やゝ複雑な計算もある。あるいは，さらに複雑な例としては,「共役溶液」と呼ばれる混合物に関する計算がある。共役溶液とは，Ａ，Ｂ２種の液体（例えばエーテルと水）を混合するとき，ＡはＢを，ＢはＡをそれぞれ少量ずつ互いに溶かし合うために，２つの飽和溶液が２層となって共存するような溶液のことである。そこでこのようにして得られる２つの飽和溶液の量の算定も，濃度計算の範疇に入れなければならぬ。

ところでこのような混合に関する計算の多くは，その基礎となる原理はおお

むね単純であるにもかかわらず，正確な答を得るためには，かなりの推理力と注意力とを必要とするものである。(中学や高校の代数の問題の中に，まれには大学入試の問題の中にさえ，「混合に関する問題」が散見されるのは，おそらくそのためであろう。)

中学生や高校生が，推理力や注意力涵養のために，このような問題を解くことはそれなりに有意義なことかも知れないが，実際的な問題において，計算の結果としての数値を知ることが当面の目的である場合は，結果に至る思考過程自体は，頭脳の浪費と言っても過言ではない。要は労せずして，速やかに，正確な答を得ることであろう。

「混合論」は，混合に関与する物質をすべて「組成式」として記号化し，これに基いて「混合方程式」なる概念を導入することによって，混合に関する計算を機械的演算に変え，労せずして正確な結果を得ることを当初の目的として筆者が創案した数学である。そこで序論においては，まず，混合に関する典型的な計算問題2題を選びその混合論的解法を示して，本論への導入としたい。但し，ここでは，この論文の要旨を述べるのが主眼であるから，理論的説明はできうる限り省略する。

例題1．(単純な混合に関する問題)

純金（24K）100g がある。これに18K および12K の金を幾らかずつ加えて，22K の金 125g を作りたい。それぞれ何gを加えればよいか。

解． 18K の金を xg，12K の金を yg 加えるものとすれば，題意により次の混合方程式を得る。(題意を数式に「翻訳する」)

$$100[24]+x[18]+y[12]=125[22]$$

規則により　　$100+x+y=125$（係数間の関係）…………………………(1)

濃度指数（ [　] の中の数）から12を引くと（「法則4」）

$$100[12]+x[6]+y[0]=125[10]$$

「法則2」（係数と濃度指数の積の和は相等しい）により

$$1200+6x=1250$$

$$\therefore\ x=\frac{50}{6}$$

$$\underline{=8.33}\,(\mathrm{g})$$

これを(1)式に代入して

$$y=125-100-8.33$$
$$\underline{=16.67}\,(\mathrm{g})$$

例題２．（やゝ複雑な混合に関する問題）

濃度20％の食塩水 100g がある。これより水分を蒸発させることにより，25℃において食塩の沈澱 2.0g を得るためには，何 g の水分を蒸発させねばならないか。但し25℃における食塩の飽和溶液濃度は26.6％とする。

解． 濃度20％の食塩水100g（$=100[20]$）から水 xg（$=x[0]$）を除くと，残りは食塩 2 g（$=2[100]$）と食塩の飽和溶液 yg（$=y[26.6]$）であるから，これを混合方程式に直せば（式に翻訳すれば）

$$100[20]-x[0]=2[100]+y[26.6]$$

前題と同様に係数の和を等置して

$$100-x=2+y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

「法則２」により（前題参照）

$$2000=200+26.6y$$
$$\therefore\ y=\frac{1800}{26.6}$$
$$=67.7\,(\mathrm{g})$$

これを(1)に代入して

$$x=100-2-67.7$$
$$=\underline{30.3}\,(\mathrm{g})$$

すなわち，水分を 30.3g 蒸発させればよいことが分かる。

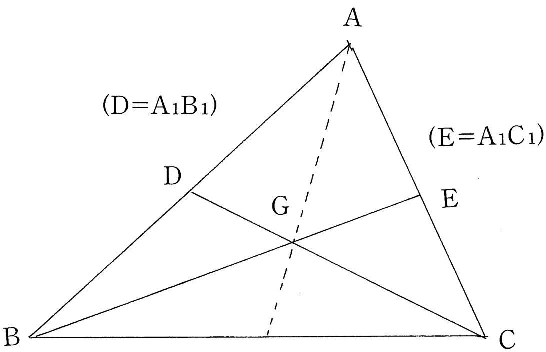
因みにこの問題は旧制一高（現東大）の数学の入試問題である。決して難問というほどのものではないが，慎重な思考を必要とする問題である。通常の代数的解法ついては本論第３章で述べる。

次に，第４章「幾何学への応用」についても一言触れておかねばならぬ。この章は第１章で定義される「組成式」，すなわち混合物の組成を示す式を，平

面上の，または空間にある点の座標として用いる，いわば「新幾何学試論」である。この方法は，ある特定分野においてはかなり有効であることが分かったので，一例をあげて，その手法を紹介することにする。前題の場合と同様，ここでも理論的説明は本論に譲る。

なおついでながら付記すると，第４章（幾何学への応用）は，第２章，第３章とは直接的な関わりはない。第４章を理解するには第１章のみで十分である。

例題３． 三角形の中線は一点に会し，この点は各中線をそれぞれ１：２の比に内分することを証明せよ。(重心の定理)



解． 図において，△ABC の２辺 AB，AC の中点Ｄ，Ｅを組成式で表わせば

$$\mathrm{D}=\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \qquad \mathrm{E}=\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$$

２つの中線 $\overline{\mathrm{CD}}$ および $\overline{\mathrm{BE}}$ を次式のように表記する。

$$\overline{\mathrm{CD}}=\mathrm{C}x\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \qquad \overline{\mathrm{BE}}=\mathrm{B}y\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 \quad (x,\ y \text{ は変数})$$

そこで交点Ｇは次の等式を満足せねばならない。

$$\mathrm{C}x\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1=\mathrm{B}y\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$$

故に　$x=1,\ y=1$

$$\therefore\quad \mathrm{G}=\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$$

「組成式の変形法則」により

$$G = A_1B_1C_1 = A_1(B_1C_1)_2 \quad \cdots\cdots(1)$$
$$= B_1(C_1A_1)_2 \quad \cdots\cdots(2)$$
$$= C_1(A_1B_1)_2 \quad \cdots\cdots(3)$$

上式のうち(1)は，ＡとＧを結ぶ線分がBCの中点を通ること，およびこの中線はＧによって１：２に内分されることを示す。式(2)および(3)も同様のことを示す。よって本題は証明された。

(註) 別の一対の中線についても，その交点は $A_1B_1C_1$ となるから，これをもって三中線が一点に会することの証明としてもよい。

本論文は，数学について全くの素人である筆者が，ふとしたきっかけで思いついた実用数学を，「混合論」の名の下に，一応体系化したものである。言うまでもないことながら，純数学的には，取るに足りぬものであるが，筆者の経験上，十分実用に耐えるものであり，このような数学があってもよいと思うので，敢えて発表する。もし専門家の御教示を仰ぐことができれば，望外の喜びとするところである。

第１章　組　成　式

1.1　混合物の表記，組成式

普通われわれが，「ここに３種の異なる物質Ａ，Ｂ，Ｃがある。」と言うとき，これらの文字Ａ，Ｂ，Ｃは，個々の物質の種類を示すだけで，その量については何も語らない。そこで丁度，化学記号Ｈが水素という元素を示すと同時に，水素原子１個，原子量1.00797，等を表すように，文字Ａ，Ｂ，Ｃ等は，それぞれの物質の種類を示すと同時に，その物質の単位量（例えば１g）を表わすものと定める。そしてそのｍ倍量，たとえばＡなる物質ｍグラムは mA の如く表示するものと定める。

いま仮に３種の物質Ａ，Ｂ，Ｃを考え，これらをそれぞれａグラム，ｂグラム，

ｃグラムずつ混合したとき，一つの均質な混合物が（a＋b＋c＝m）グラム＊得られたとする。この混合物は，成分の割合がＡ：Ｂ：Ｃ＝a：b：c，重量はmグラムである。このような混合物を式：

$$mA_aB_bC_c$$

で表し，これをこの混合物の**組成式**と名付ける。混合物の重量を示す数mを組成式の**係数**，ａ，ｂ，ｃを，それぞれ成分Ａ，Ｂ，Ｃの**比例係数**と呼ぶことにする。

そこで物質の種類が同一で，量が等しいことを等号（＝）をもって示すこととすれば，上述の関係は次式によって総括される。

$$\left.\begin{aligned} aA+bB+cC &= mA_aB_bC_c \\ &= mA_{a'}B_{b'}C_{c'} \\ \text{但し}\quad a+b+c &= m \\ a:b:c &= a':b':c' \end{aligned}\right\} \qquad [1\cdot 1]$$

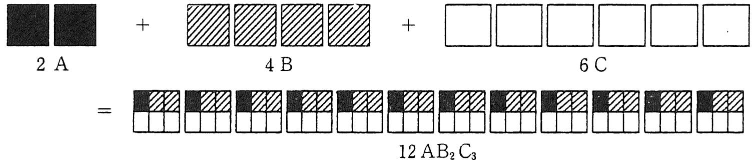
この式は混合論の根底をなす式で，以下すべての所論はこの式を根拠とする。そこでこの式を特に**基本式**と名付けて他の式と区別することにする。

＊**(註)**　単位を重量でなく容量単位にすれば a＋b＋c＝m は必ずしも成り立たない。例えば砂糖20c.c.を水100c.c.に加えても，砂糖水は120c.c.にはならない。また混合によって体積の膨張，収縮が起る場合もまた同じである。従って当面，単位は重量（または質量）の単位に限定する。

例題1.1　物質Ａを２g，Ｂを４g，Ｃを６g混合して得られる混合物の組成式は，基本式により

$$\begin{aligned} 2A+4B+6C &= 12A_2B_4C_6 \\ &= 12AB_2C_3 \text{（比例係数１は通常省略する）} \end{aligned}$$

なおこの関係を図解すれば次のようになる。



1.2　組成式の分解，加法と減法

混合の基本式で示される組成式の定義から，一般に組成式 $mA_aB_bC_c$ は次のように，その成分に分解することができる。

$$mA_aB_bC_c=\frac{ma}{a+b+c}A+\frac{mb}{a+b+c}B+\frac{mc}{a+b+c}C \qquad [1.2]$$

（この関係は基本式の両辺を $a+b+c$ で割ることによっても得られる。）

例題1.2　$$100A_2B_3C_5=\frac{100\times2}{2+3+5}A+\frac{100\times3}{2+3+5}B+\frac{100\times5}{2+3+5}C$$
$$=20A+30B+50C$$

混合物の加法，すなはち２つ以上の異なる混合物を混合して得られる１つの新しい混合物の組成式を求める演算は，まず与えられた個々の混合物の組成式を各成分に分解し，次の例のように行う。

例題1.3　$100A_2B_3C_5+200A_5B_4C$　を計算せよ。

解.
$$100A_2B_3C_5=\ 20A+30B+50C$$
$$200A_5B_4C\ =\underline{100A+80B+20C\ \ (+}$$
$$120A+110B+70C=300A_{12}B_{11}C_7$$

減法も同様にして行うが，減法の場合は次の例のように，組成式の中に負の比例係数が現れることがある。

$$200A_5B_4C-100A_2B_3C_5$$
$$=100A+80B+20C-(20A+30B+50C)$$
$$=80A+50B-30C$$
$$=100A_8B_5C_{-3}$$

組成式の比例係数に負数を持つような混合物は実在しないが，計算上は少しも差支えはない。我々はこのような組成式を「負の組成式」として，通常の「正の組成式」と区別することにする。

1.3　負の組成式の意味

負の組成式は，実際の計算に出てくることはあまりないが，最後の章（幾何

学への応用）で組成式を座標として用いる場合極めて重要な役割を演ずることになるので，ここで簡単に検討を加えておくことにする。負の組成式として A_2B_{-1} を例にとって検討する。

組成式 A_2B_{-1} は規則に従って次のように分解される。

$$A_2B_{-1}=1\times\frac{2}{2-1}A+1\times\frac{-1}{2-1}B=2A-B$$

両辺にBを加えれば（あるいは，Bを移項して）

$$A_2B_{-1}+B=2A$$

この式は，「A_2B_{-1} で表示される，この奇妙な混合物の1単位量は，もし別の物質B1単位量が加えられたとすれば，2単位量の純粋な物質Aとなるであろう」ような物質の単位量を表している。

この式を別の観点から理解するために，3つの混合物 A_2B_1, AB_0, および A_2B_{-1} を，Aの含有率に着目して比較してみる。

A_2B の場合　　Aの全量に対する割合 $=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$ （66.7％A）

AB_0　〃　　　　〃　　　　$=\frac{1}{1+0}=1$ （100％A）

A_2B_{-1}　〃　　　　〃　　　　$=\frac{2}{2-1}=2$ （200％A）

つまり A_2B_{-1} はAの純度が200％の，ある物質1単位量を表していると考えることもできる。

さて以上のような言い方をすると，負の組成式が何となく超現実的に見えるが，最後の章で述べるように，これは簡単に図示することができるものである。例えば下図に示す線分 AB において，点AおよびBはそれぞれ純粋な物質AおよびBを表すものと定めれば，AとBの混合物はすべて線分 AB 上の点で表すことができる。例えば点P（線分 AB を1：2の比に内分する点）は混合物 A_2B_1 を表す。そこで負の組成式 A_2B_{-1} を持つ混合物は線分 AB を1：2の比に外分する点Qで表されることになる。

1.4 組成式の変形に関する法則

混合の基本式から，組成式の性質に関して，幾つかの重要な式変形法則が導かれる。説明の便宜上，関与する成分の数は，適宜2乃至4種に限定する。（法則の一般化は容易に類推できる。）

法則1　組成式の比例係数に同じ数（但し0を除く*）を乗じても組成式は同値である。（同一の混合物を表示する。）なおこれを式で示せば

$$mA_aB_bC_c = mA_{ak}B_{bk}C_{ck} \quad (\text{但し}k \neq 0) \qquad [1.3]$$

これは組成式の定義より自明であるが，式の変形の基本であるのであえて法則1とする。

*(註)　比例係数に0を掛ければ，総ての比例係数は0となり，その混合物の存在そのものが否定されることになる。しかし，このことは，組成式の中に比例係数0を含んではならない，ということを意味しない。例えば，組成式 $5A_2B_3C_0$ は

$$5A_2B_3C_0 = 2A + 3B + 0C$$

つまり，この混合物はCを全く含まないというに過ぎない。上式でCの係数は0であるが，これはCという成分が全く存在しない（量が0である）こと，従ってその式は抹消してよいことを示す。すなわち上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} 5A_2B_3C_0 &= 2A + 3B + 0C \\ &= 2A + 3B \end{aligned}$$

例題1.4　比例係数に負数を乗じても法則1が成り立つことを，組成式について確かめてみる。

$$\begin{aligned} A_2B_{-1} &= \frac{2}{2-1}A + \frac{-1}{2-1}B \\ &= 2A - B \\ A_{-2}B &= \frac{-2}{-2+1}A + \frac{1}{-2+1}B \\ &= 2A - B \end{aligned}$$

従って　$A_2B_{-1} = A_{-2}B$

法則2　組成式 $A_aB_bC_cD_d$ は，その中の任意の成分の組み合わせ，例えば B_bC_c を1つの特定の物質と見なし，これを (B_bC_c) で示せば，次のように変形することができる。逆もまた真である。

$$A_aB_bC_cD_d = A_a(B_bC_c)_{b+c}D_d \qquad [1\cdot4]$$

この法則は次のようにも表現できる。

$B_bC_c = X$ とおけば $A_aB_bC_cD_d = A_aX_{b+c}D_d$

なお，証明は次のように簡単である。

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)A_aB_bC_cD_d &= aA+bB+cC+dD\\ &= aA+(b+c)B_bC_c+dD\\ &= (a+b+c+d)A_a(B_bC_c)_{b+c}D_d\end{aligned}$$

例題1.5　(1)　$A_2B_3C_7 = (A_2B_3)_5C_7$

(2)　$(A_2B_3)_5(CD)_2 = A_2B_3CD$

*(3)　$(A_xB_{1-x})_1(A_yB_{1-y})_2 = A_xB_{1-x}A_{2y}B_{2-2y}$

$= A_{x+2y}B_{3-x-2y}$

(註)　*この計算は「幾何学」において特に重要な役割を演ずる。

法則3　組成式中の成分は，その成分の比例係数の総和が変わらない限り次の如く任意に分割することができる。

$$A_{a_1+a_2}B_{b_1+b_2}C_c = A_{a_1}A_{a_2}B_{b_1}B_{b_2}C_c \qquad [1.5]$$

逆もまた真である。

(証明は略すが，これも忘れてはならない重要な法則である。)

例題1.6　(1)　$A_3B_2C_5 = AA_2B_2C_2C_3$

$= A_3B_3B_{-1}C_6D_{-1} = \text{etc.}$

(2)　A＝AA＝AAA が成り立つことを検証せよ。

$AA = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$

$AAA = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}A = A$

一見矛盾に見えるがこの関係が成り立つことは明らかである。

例題1.7　上記の諸法則を用いて，$2ABC + A_2B$ を計算せよ。

解.　$2ABC + A_2B = 3(ABC)_2(A_2B)$

$= 3(A_2B_2C_2)_6(A_2B)_3$　　(法則1)

$$=3A_2B_2C_2A_2B \qquad (法則2)$$

$$=3A_4B_3C_2 \qquad (法則3)$$

1.5　式変形法則の応用

今まで述べて来た組成式変形の法則に関する論議は，自明のことで，退屈なものに思えるかも知れないが，実際的な問題，特に化学の計算問題および幾何学の問題を解くのに重要，かつ有効であることがやがて明らかとなるであろう。差し当たってこの章では，化学に関する問題2題を選んで解いてみることにする。（幾何学への応用は第4章で論ずる。）

問題1.1　水素と酸素を重量単位で等量ずつ混合し反応させて水を作ったとする。生じた水と残留気体（何かを言え）との重量比を求めよ。

解. 化学式 H_2O は水素と酸素の重量比が 2：16（＝1：8）であることを示している。そこで水を仮に混合物と考えて組成式で表せば H_1O_8 となる。

従って

$$H_8O_8=H_1O_8H_7 \qquad (法則3)$$

$$=(H_1O_8)_9H_7 \qquad (法則2)$$

そこで直ちに，残留気体は水素で，これと水との重量比は7：9であることが分かる。

問題1.2　ホウ酸の溶解度は水 100g につき20℃では 5.0g，80℃では 23.6g である。80℃におけるホウ酸の飽和溶液 100g を20℃まで冷やすと，ホウ酸の結晶が何グラム析出するか。

（津田　栄著　化学計算問題の解き方）

解. ホウ酸をB，水をWで表すと，80℃および20℃におけるホウ酸の飽和溶液は，それぞれ，組成式 $B_{23.6}W_{100}$ および B_5W_{100} で表される。

従って

$$100B_{23.6}W_{100}=100B_5B_{18.6}W_{100} \qquad (法則3)$$

$$=100(B_5W_{100})_{105}\underline{B_{18.6}} \qquad (法則2)$$

下線の部分が析出するホウ酸の相対的な量を示すから，実際の析出量は

$$100\times\frac{18.6}{105+18.6}=\underline{15.05}\,(g)$$

上記の解法は余りにも簡単であるので，人はこの問題自体が単純なのだ，と思うかも知れないが，実はそうではない。比較のために，本題の普通の解き方二三を紹介しよう。

まず初めに，この問題を引用させていただいた前記の大学受験参考書の解答をそのまま再録する。

解. 80℃で 100g の水にホウ酸をできるだけ多く溶かすと 23.6g 溶ける。それを20℃まで冷やすと，20℃では 100g の水に 5.0g だけしか溶けないから，23.6－5.0＝18.6(g)のホウ酸が結晶となって析出する。これは水が 100g あるとき，つまり全量が100＋23.6＝123.6 (g) ある場合に析出する量であるから，飽和溶液が 100g である場合は

$$18.6\times\frac{100}{123.6}=\underline{15.05}\,(\mathrm{g})$$

即ち析出する結晶の量は 15.0g である。

上述の算術的推理は，実は組成式の変形に対応するものなのだが，残念ながら，一読して明瞭と云うには程遠い推理ではあるまいか。(特に下線の部分)

次に代数による解法の一例を示す。

解. 析出するホウ酸の量を x(g) とすれば，析出後20℃において溶液中に含まれるホウ酸の量は $(100-x)\times\frac{5}{100+5}$(g) となる。そこで析出前と析出後のホウ酸の全量を等置して次の方程式を得る。

$$100\times\frac{23.6}{100+23.6}=x+(100-x)\times\frac{5}{100+5}$$

整理して，

$$\frac{100}{105}x=\frac{2360}{123.6}-\frac{500}{105}$$

$$x=\frac{105}{100}\left(\frac{2360}{123.6}-\frac{500}{105}\right)=\underline{15.05}\,(\mathrm{g})$$

最後に，参考までに学生の解答中にしばしば見いだされる誤答の一例を示せば次の通りである。

解. 80℃のホウ酸飽和溶液 100g に含まれるホウ酸の量は$100\times\frac{23.6}{100+23.6}=$ 19.1g である。一方20℃における同量の飽和溶液中のホウ酸の量は 100×

$\frac{5}{100+5}$=4.75g である。この２つの差，19.1−4.75=14.35g が析出されるホウ酸量である。(実はそうではない。)

この解法は誤りであるが，その理由は，ホウ酸の析出によって飽和溶液の全量が減ることが全く考慮されていないからである。

第２章　濃度型組成式

本章では，混合に関する計算を，より効果的ならしめる，いま一つのタイプの組成式，濃度型組成式について述べる。

2.1　濃度型組成式の定義

一つの混合物において，任意の一成分Aの全量に対する割合，すなはちAの濃度が c であるとき，この混合物の単位量を A[c] で表し，これを**濃度型組成式**と名づける。(これに対し，今まで扱った形を「標準型」と呼ぼう。) また c をこの組成式の**濃度指数**と呼ぶことにする。

例えば組成式 $A_aB_bC_c$ について云えば，成分Aの全量に対する比は $\frac{a}{a+b+c}$ であるから

$$A_aB_bC_c = A\left[\frac{a}{a+b+c}\right]$$

と書くことができる。他の成分についても同様に

$$A_aB_bC_c = B\left[\frac{b}{a+b+c}\right],\ 等$$

と書けるわけであるが，実際問題として，「濃度」とは通常溶質と溶媒の２成分に係わる概念であるから，以降濃度型組成式を論ずる場合は，成分数は原則としてA，B２種に限定する。

そこで特に２成分組成式 A_aB_b について改めて濃度型組成式と標準型組成式の関係を検討する。

いま $A_aB_b = A\left[\frac{a}{a+b}\right] = A[c]$ とすれば

$$A[c] = A_aB_b = \frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B \quad ([1.2]式参照)$$

$$= cA + (1\text{-}c)B$$

$$=A_cB_{1-c}\quad\left(=B\left[\frac{1-c}{c+1-c}\right]\right)\qquad[2.1]$$

$$=B[1-c]\qquad[2.2]$$

上式のうち[2.1]式は濃度型を標準型に直すための公式であり，[2.2]は溶質と溶媒を変換するための公式である。(後者については後で述べる。)

2.2　濃度指数の検討

既に述べたように，濃度型組成式の濃度指数cは，一つの成分の全体に対する比であるから，その数値は原則として0と1の間にあるべきものである。特別の場合として次の4つの場合が考えられる。

(1)　$c=1$ の場合：公式[2.1]により

$$A[1]=A_1B_{1-1}$$
$$=AB_0=A$$

すなはち $A[1]$ は純粋なA物質の単位量を表す。

(2)　$c=0$ の場合：

$$A[0]=A_0B_1=B$$

すなはち $A[0]$ は純粋なB物質の単位量を表す。

(3)　$c>1$ の場合：例えば $c=1.5$ のときは，

$$A[1.5]=A_{1.5}B_{1-1.5}$$
$$=A_{1.5}B_{-0.5}$$
$$=A_3B_{-1}$$

すなはち，この組成式は第1章で論じた負の組成式であり実在しない混合物を示す。

(4)　$c<0$ の場合：例えば $c=-0.5$ のときは，

$$A[-0.5]=A_{-0.5}B_{1-(-0.5)}$$
$$=A_{-0.5}B_{1.5}$$
$$=A_{-1}B_3\ (=A_1B_{-3})$$

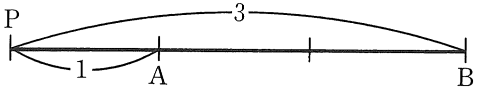
この場合も負の組成式である。

ところで上記のうち，(3) $c>1$ の場合と，(4) $c<0$ の場合いずれも負の組成式であり，その標準型組成式を見る限りでは，この両者間の相違が判然しない。そこでこれを図示してみる。

$c>1$ の場合：

組成式 $A[1.5]=A_3B_{-1}$ は図 1 の点 P，すなわち，線分 AB を A の左方で 3：1 に外分する点で表示される。

図 1.

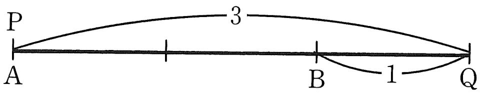


A[1.5]	A[1]	A[0.5]	A[0]
B[−0.5]	B[0]	B[0.5]	B[1]

$c<0$ の場合：

組成式 $A[-0.5]=A_{-1}B_3$ は，図 2 の点 Q，すなわち線分 AB を B の右方で 3：1 に外分する点で表示される。

図 2.



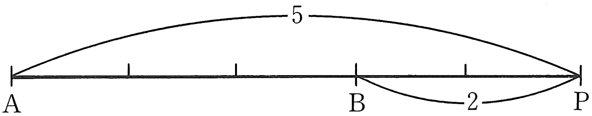
A[1]	A[0.5]	A[0]	A[−0.5]
B[0]	B[0.5]	B[1]	B[1.5]

すなわち，負の組成式が標準型で与えられた場合，その比例係数を見ただけでは，それが線分 AB のどちら側にある点を示すかは判別が難しいが，これを濃度型に直せば，判定は容易である。すなわち，上図において，成分 A について濃度指数が 1 より大ならばその組成式の示す点は A の左側にあり，0 より小ならば B の右側にあることが分かる。成分 B についての濃度型組成式ではこの関係は逆になる。すなわち，この場合は，濃度指数が 1 より大ならば，組成式は B の右側，0 より小ならば A の左側の点を示すことになる。

例題2.1　組成式 A_2B_{-5} および A_5B_{-2} を図示したとき，各式の示す点は，線分 AB のいずれの側にあるかを判定せよ。

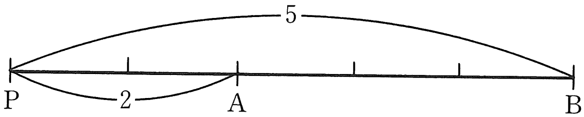
解. $A_2B_{-5}=A[\frac{-2}{3}]$　$c<0$　Bの右（Aが減る方向）

$=B[\frac{5}{3}]$　$c>1$　Bの右（Bが増える方向）



$A_5B_{-2}=A[\frac{5}{3}]$　$c>1$　Aの左（Aが増える方向）

$=B[\frac{-2}{3}]$　$c<0$　Aの左（Bが減る方向）



2.3　溶質と溶媒の相互関係

本章2.1で述べたように，２成分Ａ，Ｂよりなる濃度型組成式については次の関係が成り立つ。（本章2.1参照）

$$A[c]=A_cB_{1-c}=B[1-c] \qquad [2.2]$$

もし２成分の一方を溶質，他方を溶媒と考えれば，この式は**溶質と溶媒とを取替えるための公式**といえよう。

溶質と溶媒の関係は，次章においても取り扱わねばならぬので，こゝで，この化学用語の定義について一言する。

例えば，ある一定量の食塩が水に溶けて溶液となっている場合は，食塩が溶質，水はその溶媒である。しかし，もし両成分が共に液体の場合は，溶質と溶媒の使い分けは曖昧になる。例えば 100g の水に１g のアルコールが含まれている溶液では，アルコールが溶質で水が溶媒というのは自然である。しかし反対に，水１g がアルコール 100g に溶けている場合，水が溶媒であるとは誰も言わない。このような場合化学では普通，量の少ない方を溶質，多い方を溶媒というのが慣わしのようである。そこで上記の溶質，溶媒の変換式は，実際的にはＡ，Ｂがともに液体である場合に適用される式で一方が個体の場合に適用

されることはない。

例題2.2　アルコールを30％含むアルコール水溶液は，アルコールをA，水をWで表わせば次の二様に表示することができる。

$$A_3W_7 = A[0.3]$$
$$= W[1-0.3] = W[0.7]$$

このような表示法は，一見何の意味もないようであるが，複雑な溶液，例えば序論でも触れた「共役溶液」等を扱う場合は重宝である。「共役溶液」とは，既に述べたように，例えばエーテルと水のように，両液を混ぜると２つの飽和溶液（一つはエーテルを溶質，水を溶媒とする溶液，他は水を溶質，エーテルを溶媒とする溶液）が二層をなして共存するような溶液のことである。このときに生ずる２層の量と，当初に混合するエーテルおよび水の量との量的関係については第３章で取り扱うことにする。

2.4　加法法則

同一成分Aについての濃度型組成式の加法は，もっぱら次の公式によって行う。

$$m_1A[c_1] + m_2A[c_2] + \cdots = mA\left[\frac{m_1c_1 + m_2c_2 + \cdots}{m}\right]$$

$$\text{但し}\quad m = m_1 + m_2 + \cdots \qquad [2.3]$$

証明　（煩雑を避けるため，２項の和について証明を行う。３項以上についても公式が成り立つことは容易に類推できる。）

$$m_1A[c_1] = (m_1Ac_1B_{1-c_1}) = m_1c_1A + m_1(1-c_1)B$$
$$m_2A[c_2] = (m_2Ac_2B_{1-c_2}) = m_2c_2A + m_2(1-c_2)B$$

いま　$m_1 + m_2 = m$

$$m_1c_1 + m_2c_2 = n$$

とおけば，

$$m_1A[c_1] + m_2A[c_2] = nA + (m-n)B$$
$$= mA_n\,B_{m-n}$$
$$= mA\left[\frac{n}{m}\right]$$

$$= mA\left[\frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m}\right]$$

例題2.3　$20A[0.1] + 30A[0.2] + 50A[0.3]$

$$= (20+30+50)A\left[\frac{20\times0.1+30\times0.2+50\times0.3}{20+30+50}\right]$$

$$= 100A[0.23]$$

第3章　混合方程式

これまで組成式を含む多くの等式を見てきたが，それらは代数で言えば，いわゆる恒等式に相当するもので，恒常的，無条件的に成立する等式である。組成式よりなる等式で，特定の条件の下でのみ成立するような等式を**混合方程式**と名付け，本章ではこれについて論ずる。混合方程式は，関与する組成式のタイプによって２種に分けられる。すなわち，標準型と濃度型の二様の混合方程式である。

3.1　標準型の混合方程式

便宜上，成分の種類をＡ，Ｂ，Ｃの三種に限定すれば，標準型の混合方程式は，次の一般式で表わされる。

$$m_1A_{a_1}B_{b_1}C_{c_1} + m_2A_{a_2}B_{b_2}C_{c_2} + \cdots$$
$$= m'_1A_{a'_1}B_{b'_1}C_{c'_1} + m'_2A_{a'_2}B_{b'_2}C_{c'_2} + \cdots \qquad [3.1]$$

もし与えられた混合方程式の中に未知数が含まれておれば，与えられた条件に応じて，その数値を求めることができる。次に二，三の例を示す。(このように未知数を求めることを「混合方程式を解く」と呼ぶことにする。)

例題3.1　Ａ，Ｂ２成分よりなる２種の混合物がある。一つはＡ，Ｂの比２：３，他は成分比不明である。これら２つの混合物を５：２の割合に混合したところ，成分比１：１の混合物を得たという。未知の成分比を求めよ。

解. 未知の成分比を $x:y$ とすれば，題意により次の混合方程式を得る。

$$5A_2B_3+2A_xB_y=7AB$$

第１項を移項して

$$\begin{aligned}2A_xB_y&=7AB-5A_2B_3\\&=3.5A+3.5B-(2A+3B)\\&=1.5A+0.5B\\&=2A_{1.5}B_{0.5}\\&=2A_3B\end{aligned}$$

すなわち，求める成分比は A：B＝3：1 であることが分かる。

これに類似の問題であるが，次の例のように少しく演算を工夫することによって，複雑な混合問題が簡単に解ける場合がある。

例題3.2　三種の合金がある。一つは，金20％，銀80％の合金 20g，他はそれぞれ銀・銅の合金 30g と，金・銅の合金 50g であるが成分の割合は共に不明である。これら３種の合金を全部混合したところ，金39％，銀28％，銅33％の合金を得た。後の２つの合金の組成を求めよ。

解. 金，銀，銅をそれぞれ A , B , C で表わせば題意により次の混合方程を得る。

$$20A_2B_8+30B_xC_y+50C_{y'}A_{x'}=100A_{39}B_{28}C_{33}$$

第１項を移項して

$$\begin{aligned}30B_xC_y+50C_{y'}A_{x'}&=100A_{39}B_{28}C_{33}-20A_2B_8\\&=39A+28B+33C-4A-16B\\&=12B+33C+35A\end{aligned}$$

右辺の係数を左辺の係数30＋50に合わせるために，右辺の第２項33Ｃを次のように分割する。

$$\begin{aligned}右辺&=\underbrace{12B+18C}+\underbrace{15C+35A}\\&=30B_{12}C_{18}+50C_{15}A_{35}\\&=30B_2C_3+50C_3A_7\end{aligned}$$

左辺と右辺の比較から

$$x:y=2:3,\quad y':x'=3:7$$

すなわち２つの合金の組成は，それぞれ銀：銅＝２：３，銅：金＝３：７であ

ることを知る。

標準型の混合方程式は，混合に関与するすべての物質を記号として示すことができ，またそれらの量的関係，あるいは組成を明確に表示するのに適しているが，実際的な計算の面では，有効性に欠けることが少なくない。例えば次のような場合である。

例題3.3　$xAB_2+yA_3B=100AB$ に適する x,y の値を求めよ。

この方程式の意味するところは至極明瞭である。すなわち，「成分比 A：B＝1：2 なる混合物と A：B＝3：1 なる混合物をどのような割合に混合すればA：B＝1：1 なる混合物 100g が得られるか」ということを表している。これを解くには先ず各項を成分に分解する必要がある。

$$\frac{x}{3}A+\frac{2x}{3}B+\frac{3y}{4}A+\frac{y}{4}B$$
$$=\frac{4x+9y}{12}A+\frac{8x+3y}{12}B=100AB$$

AとBとの比は右辺の式から1：1であるから

$$4x+9y=8x+3y \tag{1}$$

一方原方程式の係数の比較から

$$x+y=100 \tag{2}$$

連立方程式(1)，(2)を解いて

$$x=60,\ y=40$$

が得られるが，このような手法は，あまりにも煩わしく，当面の期待に反するものである。より容易な，そしてより効果的な解法は濃度型混合方程式に俟たねばならない。

3.2　濃度型混合方程式

濃度型組成式より成る混合方程式が濃度型混合方程式である。成分Aについての濃度型混合方程式は，次の一般式で表すことができる。

$$m_1A[c_1]+m_2A[c_2]+\cdots=n_1A[d_1]+n_2A[d_2]+\cdots \tag{3.2}$$

この方程式から，濃度型混合方程式の性質について次の4つの重要な法則が

導かれる。

法則 1． 方程式の両辺の各組成式の係数の和は互いに相等しい。すなわち，式[3.2]において

$$m_1+m_2+\cdots=n_1+n_2+\cdots \qquad [3.3]$$

組成式の係数は，その組成式によって表わされる混合物の量を示す数であるから，この関係は，組成式の定義から自明であるが，最も基本的な定めであるので，法則の第 1 に掲げる。

法則 2． 方程式両辺の，係数と濃度指数の積の和は互いに相等しい。すなわち，式[3.2]において，次の関係が成り立つ。

$$m_1c_1+m_2c_2+\cdots=n_1d_1+n_2d_2+\cdots \qquad [3.4]$$

証明　式[3.2]の両辺に加法法則を適用すれば

$$(m_1+m_2+\cdots)A\left[\frac{m_1c_1+m_2c_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}\right]=(n_1+n_2+\cdots)A\left[\frac{n_1d_1+n_2d_2+\cdots}{n_1+n_2+\cdots}\right]$$

しかるに　$m_1+m_2+\cdots=n_1+n_2+\cdots$　（法則 1）

故に　$m_1c_1+m_2c_2+\cdots=n_1d_1+n_2d_2+\cdots$

法則 3． 濃度型混合方程式中の濃度指数に同じ数を掛けても（あるいはこれを同じ数で割っても），等式は成立する。すなわち式[3.2]において任意の実数を k とすれば，

$$m_1A[kc_1]+m_2A[kc_2]+\cdots=n_1A[kd_1]+n_2A[kd_2]+\cdots \qquad [3.5]$$

証明　式[3.5]の左辺

$$=(m_1+m_2+\cdots)A\left[\frac{k(m_1c_1+m_2c_2+\cdots)}{m_1+m_2+\cdots}\right] \qquad \text{（加法法則）}$$

また同式の右辺

$$=(n_1+n_2+\cdots)A\left[\frac{k(n_1d_1+n_2d_2+\cdots)}{n_1+n_2+\cdots}\right]$$

しかるに　$m_1+m_2+\cdots=n_1+n_2+\cdots$　（法則 1）

$m_1c_1+m_2c_2+\cdots=n_1d_1+n_2d_2+\cdots$　（法則 2）

であるから，法則 3 が成り立つことは明らかである。

法則４． 濃度型混合方程式の濃度指数に同じ数を加えても（あるいはこれから同じ数を減じても）等式は成立する。すなわち式[3.2]において，任意の実数をkとすれば，

$$m_1A[c_1 \pm k] + m_2A[c_2 \pm k] + \cdots = n_1A[d_1 \pm k] + n_2A[d_2 \pm k] + \cdots \qquad [3.6]$$

証明　[3.6]式の左辺は

$$\begin{aligned} & m_1A[c_1 \pm k] + m_2A[c_2 \pm k] + \cdots \\ & = (m_1 + m_2 + \cdots)A\left[\frac{m_1c_1 + m_2c_2 + \cdots \pm k(m_1 + m_2 + \cdots)}{m_1 + m_2 + \cdots}\right] \end{aligned}$$

また右辺は

$$\begin{aligned} & n_1A[d_1 \pm k] + n_2A[d_2 \pm k] + \cdots \\ & = (n_1 + n_2 + \cdots)A\left[\frac{n_1d_1 + n_2d_2 + \cdots \pm k(n_1 + n_2 + \cdots)}{n_1 + n_2 + \cdots}\right] \end{aligned}$$

しかるに　$m_1 + m_2 + \cdots = n_1 + n_2 + \cdots$　（法則１）

$m_1c_1 + m_2c_2 + \cdots = n_1d_1 + n_2d_2 + \cdots$　（法則２）

故に　左辺＝右辺

例題3.4　前掲の例題 3.3：

$$xAB_2 + yA_3B = 100AB$$

を濃度型に改めて，x, y を求めよ。

解． Aについて濃度型に改めると

$$xA\left[\frac{1}{3}\right] + yA\left[\frac{3}{4}\right] = 100A\left[\frac{1}{2}\right]$$

濃度指数を12倍する：（法則３）

$$xA[4] + yA[9] = 100A[6]$$

濃度指数から４を引く：（法則４）

$$xA[0] + yA[5] = 100A[2]$$

係数×濃度指数の和を等置する（法則２）

$$5y = 200 \quad \therefore \underline{y = 40}$$

これを　$x + y = 100$（法則１）に代入して

$$\underline{x = 60}$$

3.3　濃度型組成式の意義の拡張

前掲の例題3.4で見たように，方程式：

$$xA\left[\frac{1}{3}\right]+yA\left[\frac{3}{4}\right]=100A\left[\frac{1}{2}\right]$$

は，各濃度指数を12倍して得られる方程式

$$xA[4]+yA[9]=100A[6]$$

と同値の方程式である。しかしながら定義によれば，例えば第１項のＡ[4]は

$$A[4]=A_4B_{1-4}=A_4\ B_{-3}$$

つまり「負の組成式」で，実在しない混合物を表す式である。このことは計算の過程の中では少しも問題はないが，例えば４％の食塩水１gを示す組成式はＡ[0.04]であって，Ａ[4]ではないことに変りはない。この表記が許されるのは，計算の過程中，あるいは方程式の中においてのみ，ということになるが，この制約は甚だ不都合である。

そこで例えば上掲の方程式

$$xA[4]+yA[9]=100A[6]$$

の代りにその各項からＡを取り拂った式，（Ａをあたかも係数の如く見立て，両辺をＡで除した形の式）

$$x[4]+y[9]=100[6]$$

を用いることとし，$x[4]$，$y[9]$のような簡略された型の組成式を**常用型**の組成式と呼ぶことにする。

常用型組成式は，一般式：

$$m[d]$$

で表わされる。mは濃度型の場合と同様，混合物の量を表す係数であるが，ｄは濃度を相対的に示す数であれば，いかなる数値でもよいものとする。例えば20％の食塩 100g，あるいは22カラットの金 50g 等はそれぞれ100[20]，50[22]等の如く表記するものとする。

なおこの数値ｄは，混合物の濃度に限定する必要もない。一般に，もし「量」を示す数（extensive variable）ｍと，「強さ」を示す数（intensive variable）ｄの間に，濃度型組成式の加法法則

$$m_1[d_1]+m_2[d_2]+\cdots=(m_1+m_2+\cdots)\left[\frac{m_1d_1+m_2d_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}\right]$$
$$=m[d]$$

が成立つ場合は，任意の物質を $m[d]$ の形で表して，混合計算に混合方程式を適用することができる。

例えば㎏当りの単価がそれぞれ d_1 円，d_2 円，等の異なる等級の商品（例えば茶，砂糖，アルコール飲料等）をそれぞれ m_1㎏，m_2㎏，…ずつ混合すれば，得られるブレンド商品の価値は価格にして

$(m_1d_1+m_2d_2+\cdots)$ 円に相当し，その総量は

$(m_1+m_2+\cdots)$ ㎏

であるから，その単価をｄ円とすれば

$$d=\frac{m_1d_1+m_2d_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}$$

で表される。この関係は，明らかに上記加法法則に合致するから，この種の混合計算においては，価格ｄ，重量ｍなる商品を，組成式 $m[d]$ をもって表わし，混合方程式を適用することが可能である。

3.4　濃度型混合方程式の適用例

如上の所論に基づき，既に序論において挙げた例題を含め，混合に関する幾つかの問題について，濃度型混合方程式による解法例を示す。

問題3.1　重量百分率で濃度２％および３％の塩酸がそれぞれ 100g および 200g ずつある。これを全部混合し，さらに５％の塩酸を加えて，濃度４％の塩酸を作るには，５％の塩酸何g が必要か。

解.　５％の塩酸を xg 加えるものとすれば，題意により次の混合方程式を得る。

$$100[2]+200[3]+x[5]=y[4]$$

濃度指数より４を引けば（法則４）

$$100[-2]+200[-1]+x[1]=y[0]$$

法則２により（係数×濃度指数の和）

$$-200 \quad -200+x=0$$

$$\therefore \; x=400\,(\mathrm{g})$$

つまり５％の塩酸は 400g 必要である。

なお本例の代数的解法の１例を示せば次の通りである。

解. 加えるべき５％塩酸を x(g) とすれば混合液全量中に含まれる純塩酸量は

$$100\times\frac{2}{100}+200\times\frac{3}{100}+\frac{5x}{100}=8+0.05x$$

である。また混合液の全量は

$$100+200+x=300+x$$

であるから次の方程式が得られる。

$$\frac{8+0.05x}{300+x}=0.04$$

$$8+0.05x=12+0.04x$$

$$\therefore \quad 0.0x=4 \qquad x=400\,(\mathrm{g})$$

問題3.2　濃度20％の食塩水 100g がある。これより水分を蒸発させることにより，25℃において食塩の沈澱 2.0g を得るためには，何g の水分を蒸発させねばならないか。但し，25℃における食塩の飽和溶液濃度* は26.6％とする。

*［註］　食塩は，その濃度が26.6％になるまでは水に溶けるが，これを越えると溶液は飽和状態となり，余分の食塩は結晶（個体）となって析出，沈澱する。

解. 濃度20％の食塩水 100g を組成式100［20］で示せば，水（すなわち濃度０％の食塩水）xg は x［0］，食塩の結晶（すなわち濃度100％の食塩水）２g は２［100］で示すことができる。そこで題意は，「濃度20％の食塩水 100g から水 xg を除けば，残りは結晶２g と飽和溶液（その量 yg），ということであるから，これをそのまま式に直せば，次のようになる。

$$100[20]-x[0]=2[100]+y[26.6]$$

法則１・・・　$100-x=2+y$　　　…(1)

法則２・・・　$2000=200+26.6y$

$$\therefore\quad y=\frac{1800}{26.6}=67.6$$

(1)に代入して

$$x=100-2-67.6$$
$$=\underline{30.3}\,(g)$$

すなわち，水分を 30.3g 蒸発させればよいことが分る。

さて上記の解法を代数的解法と比較してみる。代数的解法は，例えば，次の様な思考を必要とするであろう。

解. 蒸発によって除くべき水分の量を x(g) とすれば，与えられた食塩水（100g）は，蒸発によって水分 xg を，また結晶析出によって食塩 2g を失うから，飽和食塩水の全量は（100−2−x）すなわち（98−x）g である。一方，この飽和食塩水中に含まれる食塩の量は，最初の食塩含有量，すなわち $100\times\frac{20}{100}=20$(g) から，析出によって失った食塩量（2g）を差引いた残り，つまり 18g である。この 18g と飽和食塩水の全量（98−x）の比が，26.6%であるわけだから，次の方程式が得られる。

$$\frac{18}{98-x}=0.266$$
$$98-x=\frac{18}{0.266}=67.7$$
$$\therefore\quad x=98-67.7$$
$$=\underline{30.3\,(g)}$$

代数方程式自体は簡単であるが，正しい方程式に至る思考過程では慎重さが要求され，これを欠くと，たちまち誤答に至る問題である。

問題3.3　水とエーテル（エチル・エーテル）は互いに他を溶解する。（第2章例題2.2「共役溶液」参照）すなわち，20℃において，水のエーテルに対する溶解度（飽和溶液濃度）は98.76（重量百分率），エーテルの水に対する溶解度は6.87である。これに基づき，

(1)　水 100g とエーテル 5g を混合したときに，2種の飽和溶液が2層をなし

て共存する状態を混合方程式を用いて示せ。

(2)　2層をなす各飽和溶液の量を求めよ。

解. エーテルをE，水をWで表わし，また2つの飽和溶液の量をそれぞれ xg，yg とすれば，題意により次の混合方程式が得られる。

$$100W+5E=xW[0.9876]+yE[0.0687] \qquad (1)$$

これが(1)で求められている方程式である。この式は題意を明瞭に表現したものであるが，x，y の数値を求めるためには，式を同じ成分の濃度型組成式に変換しなければならない。すなわち：

$$100W+5E=105W_{100}E_5$$
$$=105E[\tfrac{5}{105}]$$
$$=105E[0.0476]$$
$$W[0.9876]=E[1-0.9876] \quad (\text{第2章 [2.2] 式参照})$$
$$=E[0.0124]$$

故に(1)式は次のようになる：

$$105E[0.0476]=xE[0.0124]+yE[0.0687]$$

濃度指数を100倍し，さらにEを消せば

$$105[4.76]=x[1.24]+y[6.87]$$

濃度指数から1.24を引いて

$$105[3.52]=x[0]+y[5.63]$$

法則2により　$105\times3.52=5.63y$

$$\therefore \quad y=\frac{105\times3.52}{5.63}$$
$$=\underline{65.6}(g)$$

法則1により　$x+y=105$

$$\therefore \quad x=105-65.6$$
$$=\underline{39.4}(g)$$

これにより2つの飽和溶液の量はそれぞれ39.4g，65.6gとなることが分る。なお，これを(1)式に入れてみると，本題に示された混合に関与する4種の物質間の量的関係が次の方程式により，さらに明確に表示される。すなわちこの溶

液の状態は次式：

$$100W+5E=39.4W[0.9876]+65.6E[0.0687]$$

により一目瞭然である。

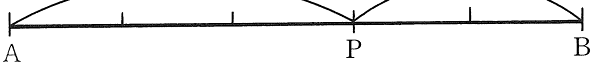
第4章　幾何学への応用

混合論を幾何学に適用すれば，ある領域における幾何学の問題は，本論独自の方法で容易に解決し得る。平面上，または空間にある点の位置を混合物の組成によって，つまり組成式を点の座標として用いることによって，一つの幾何学が成り立つ。本章はこの幾何学について論ずる。

4.1　直線上の点の表示

２つの成分Ａ，Ｂより成る混合物は，２点Ａ，Ｂを結ぶ直線上の点として表示できることは既に述べた。(第１章 1.4 負の組成式の意義，および第２章 2.2 濃度指数の検討　参照) すなわち，線分 AB 上の一点Ｐは組成式 A_aB_b で示され，比例係数ａ，ｂが同符号ならば，Ｐは線分 AB をａ：ｂに内分する点であり，異符号ならば，これを外分する点である。これをまとめて再度図示すれば次の通りである。

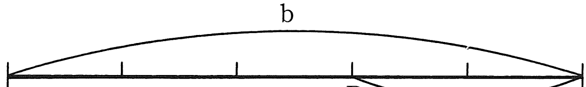
(1)　$A_aB_b=A_2B_3$



第１図

(2)　$A_aB_b=A_{-2}B_5$

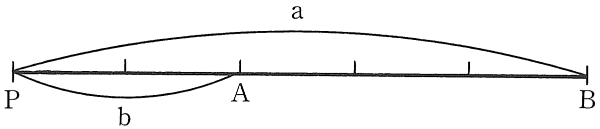
$=A\ [\frac{-2}{3}]\ =B\ [\frac{5}{3}]$



第２図

(3)　$A_aB_b = A_5B_{-2}$

$= A\ [\frac{5}{3}] = B\ [\frac{-2}{3}]$



第3図

なお上図において組成式 A_aB_b の代りに，１つの変数 x を用いて

$P = A_xB_1$ あるいは $P = A_xB_{1-x}$，等

の如く表わせば，Ｐは直線 AB 上のあらゆる点を代表する式，つまり直線 AB を表わす式と見ることができる。便宜的にこのことを

$\overline{AB} = A_xB_1$ あるいは $\overline{AB} = A_xB_{1-x}$, etc.

のように表記することにする。

4.2　平面上の点の表示

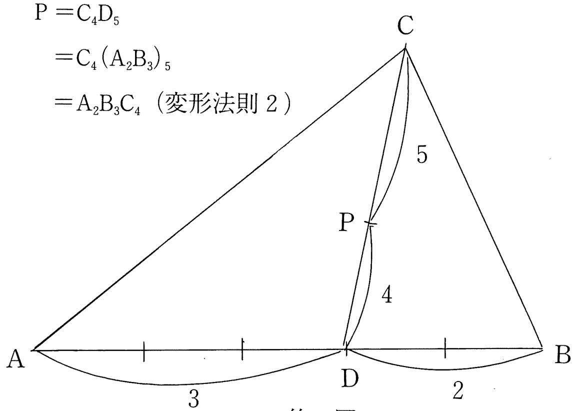
平面上の点を組成式で表すためには，上記の２点Ａ，Ｂのほかに，この２点を結ぶ直線上にない，他の一点（第三の成分）Ｃを必要とする。

第４図において，Ｃを直線 AB 上にない一点とする。いま仮に線分 AB 上に，図のように線分 AB を３：２に内分する点Ｄをとり，Ｄ，Ｃを結ぶ。次に線分 DC 上に，この線分を図の如く４：５に内分する点Ｐをとれば，

$P = C_4D_5$

$= C_4(A_2B_3)_5$

$= A_2B_3C_4$（変形法則２）



第４図

すなわち点Pの座標は $A_2B_3C_4$ で表わされることになる。なお，AとC，BとCを結べば，線分 AC，線分 BC 上の点はそれぞれ2つの成分A，CおよびB，Cよりなる組成式を以て表示されることは，線分 AB の場合と全く同様である。

一般に，平面 ABC 上のすべての点は，3成分系組成式 $A_aB_bC_c$ で表わすことができる。もし比例係数 a，b，c がすべて同符号ならば，その点は △ABC の内側にあり，異符号を含めば，その外側にあることは，2成分A，Bについての検討から容易に類推できるところである。

なお，一般式 $A_aB_bC_c$ の代りに，2つの変数 x および y を用いて平面 ABC 上の一点Pを

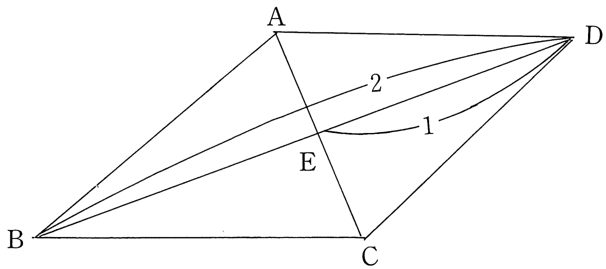
$$P = A_xB_{1-x}C_y, \quad P = A_xB_1C_y, \quad 等^*$$

の如く表わせば，これらの式は平面 ABC を代表する式として活用することができる。

*(変数の用い方は，計算が簡便になるよう，自由に選定することができる。用い方の実際は問題の解法例で後述する。)

例題4.1 平行四辺形 ABCD（第5図）の一つの頂点Dの座標を3成分A，B，Cよりなる組成式にて示せ。

解. 第5図において



第5図

平行四辺形の対角線は互に他を2等分するから，その交点をEとすれば，頂点

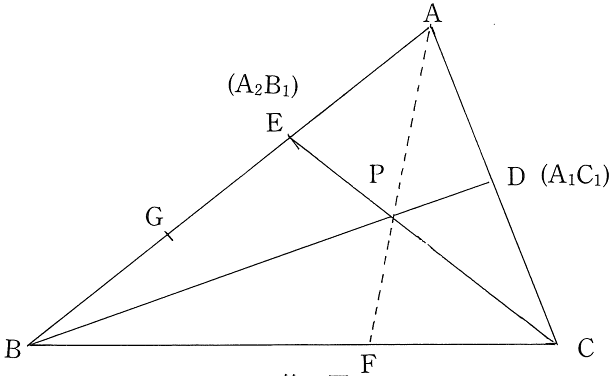
Dは線分 BE を２：１の比に外分する点である。従って

$$\begin{aligned} D &= B_{-1}E_2 \\ &= B_{-1}(A_1C_1)_2 \\ &= A_1B_{-1}C_1 \end{aligned}$$

4.3　2直線の交点

平面上にある２直線の交点の座標は，次の例のようにして容易に求めることができる。

例題4.2　三角形 ABC において（第６図），Dは辺 AC の中点，Eは，辺 AB を三等分する点とするとき，直線 BD と CE の交点の座標を成分Ａ，Ｂ，Ｃを成分とする組成式にて示せ。



第６図

解. 第６図より

$$D = A_1C_1 = A_2C_2,\quad E = A_2B_1$$

交点Ｐは $\overline{CE}$ 上の点であるから

$$P = C_xA_2B_1\ \ (x\ は変数)$$

またＰは $\overline{BD}$ 上の点でもあるから

$$P = B_yA_2C_2\ \ (y\ は変数)$$

よって　　　$C_xA_2B_1 = B_yA_2C_2$

これより　　　$x=2$，$y=1$

$$\therefore\ P=A_2B_1C_2$$

なお，交点の座標が組成式にで表されればこれを適宜に変形することにより直ちに次に示すような重要な情報が得られる。

$A_2BC_2=A_2(BC_2)_3$ から　$\overline{BF}:\overline{FC}=2:1$

および　$\overline{AP}:\overline{PF}=3:2$

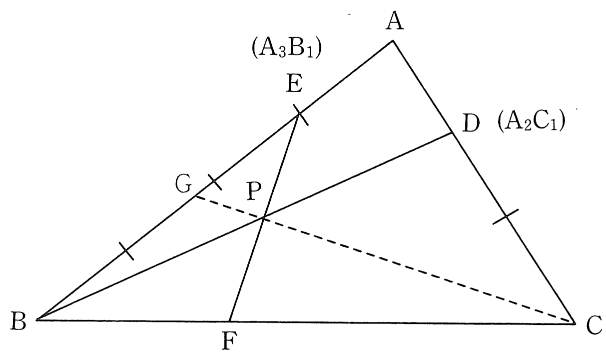
$A_2BC_2=(A_2C_2)_4B$ から　$\overline{BP}:\overline{PD}=4:1$

$A_2BC_2=(A_2B)_3C_2$ から　$\overline{CP}:\overline{PE}=3:2$

4.4　平面図形に関する問題の解法例

平面図形に関する問題2例を選び上述の理論に基づく解法を示す。最初の問題は筆者の作問であり後の一題は大学入試問題（ベクトルに関する問題）からとったものである。

問題4.1　三角形 ABC において（第7図），点DおよびEは，線分 AC および AB を，それぞれ図の如く，1：2および1：3に内分する点とする。いま点Eを通る直線を引き，これが線分 $\overline{BD}$ および $\overline{BC}$ と交わる点をそれぞれP，Fとするとき，点Pが線分 EF の中点となるように，点Fを定めよ。(筆者作問)



第7図

解. $D = A_2C_1 = A_6C_3$

$E = A_3B_1 = A_6B_2$

いま　$F = B_xC_{1-x}$ （x は変数）

とおけば，Pは線分 EF の中点であるから

$$P = (A_6B_2)_8(B_xC_{1-x})_8$$

$$= A_6B_2B_{8x}C_{8-8x} \qquad \text{（変形法則 2）}$$

$$= A_6B_{8x+2}C_{8-8x} \qquad \text{（変形法則 3）}$$

またPは線分 BD 上の点であるから

$$P = B_yA_2C_1 \quad (y\ \text{は変数})$$

$$= A_6B_{3y}C_3$$

故に　$A_6B_{3y}C_3 = A_6B_{8x+2}C_{8-8x}$

Cの比例係数を比較して

$$8 - 8x = 3$$

$$\therefore \quad 8x = 5$$

故にBの比例係数は

$$8x + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$\therefore \quad P = A_6B_7C_3$$

$$= A_6B_2B_5C_3$$

$$= (A_6B_2)_8(B_5C_3)_8$$

$$= E_1F_1$$

すなわち，線分 BC を５：３に内分する点を，Fとすればよい。

なお　$P = A_6B_7C_3$，また　$P = A_6B_7C_3$

$= B_7(A_6C_3)_9$　　　$= (A_6B_7)_{13}C_3$

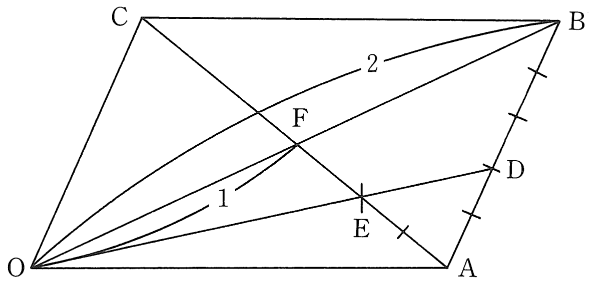
$= B_7(A_2C_1)_9$

から BP：PD＝９：７，また直線 CP と AB の交点をGとすれば

CP：PG＝13：３，BG：GA＝６：７，

等の関係も同時に明らかとなる。

問題4.2　平行四辺形 OABC の辺 AB を２：３の比に内分する点をD，対角線 AC を２：５の比に内分する点をEとすれば，３点O，E，Dは一直線上にあることを示せ。(東邦大・薬)



第８図

解.　第８図において対角線の交点をFとすれば，点Fは両対角線の中点であるから，点Oは線分 FB を２：１に内分する点である。

よってA，B，Cを座標の原点に選べば

$$O = B_{-1}(A_1C_1)_2$$

$$= A_1B_{-1}C_1 \text{（例題4.1参照）}$$

また　$D = A_3B_2,\quad E = A_5C_2$

故にO，Eを結ぶ直線 OE は

$$\overline{OE} = (A_1B_{-1}C_1)_x A_5C_2 \text{（x は変数）}$$

$$= A_xB_{-x}C_x\ A_5C_2$$

$$= A_{x+5}B_{-x}C_{x+2}$$

直線 OE と線分 AB との交点はCを含まないから上式の成分Cの比例係数は０でなければならない。

故に　$x + 2 = 0 \qquad \therefore \quad x = -2$

従ってこの交点を P′ とすれば

$$P' = A_3B_2 = D$$

よって３点 O,E,D は一線上にあることが証明される。

(註)　参考までに，ベクトルによる解法の要点を示すと次の通りである。

解.　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすれば

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$

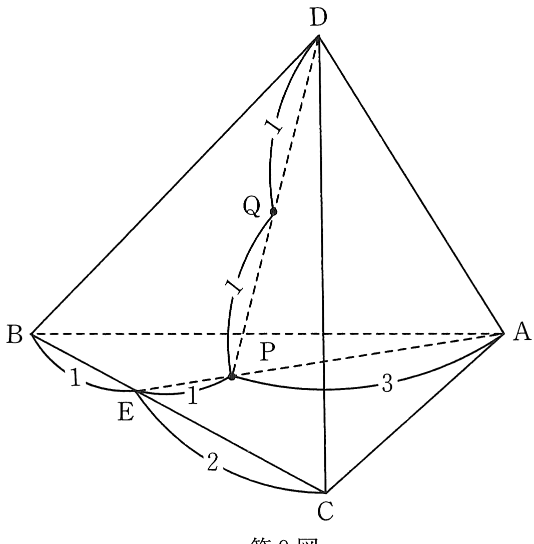
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{7}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{c} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1)，(2)より　$\overrightarrow{OD}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OE}$

であるから，３点Ｏ，Ｅ，Ｄは一直線上にある。

4.5　空間にある点の表示

既に述べた平面の表示法から容易に類推されるように，空間の点を組成式で



第９図

表すためには，３点Ａ，Ｂ，Ｃのほかに，この３点を含む平面上にない，いま一つの原点Ｄを必要とする。

第９図において，Ｄを平面 ABC 上にない一点とする。いま仮に平面上に組成式 $A_1B_2C_1$ で示される点Ｐをとり，P,D を結ぶ。次に線分 PD 上に，この線分を１：１に分つ点Ｑをとれば

$$Q = D_1(A_1B_2C_1)_1{}^{*}$$
$$= D_4(A_1B_2C_1)_4$$
$$= A_1B_2C_1D_4$$

これが，すなわち，点Ｑの座標である。

なお，４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを互に連結して得られる四面体の４つの平面上の点はそれぞれ３つの成分より成る組成式で表され，また６つの辺上の点は，それぞれ２つの成分より成る組成式で表されることは，既述の通りである。

一般に，４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを原点とする空間にあるすべての点は，４成分系組成式 $A_aB_bC_cD_d$ で表すことができ，その比例係数ａ，ｂ，ｃ，ｄがすべて同符号ならば，その点は四面体 ABCD の内側にあり，もし異符号を含めば，その外側にあることは容易に類推できるところである。

＊(註)　$Q = D_1(A_1B_2C_1)_1$ において
$A_1B_2C_1 = A_1(B_2C_1)_3$

であるから，Ｐの平面上における位置関係は第９図に示す通りである。

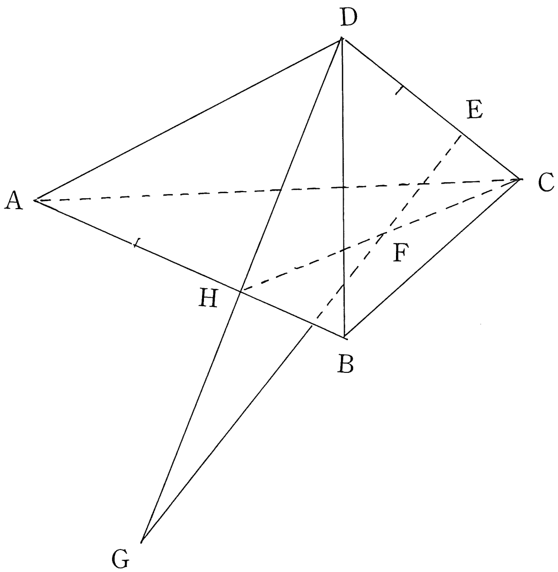
4.6　空間図形に関する問題の解法例

問題4.3　四面体 ABCD において（第10図），ＥおよびＨは，それぞれ辺 DC，AB を１：２に内分する点とする。頂点ＣとＨを結ぶ線分 CH の中点をＦとし，Ｅ，Ｆを結べば，直線 EF が面 ABD と交わる点Ｇは，Ｄ，Ｈを結ぶ直線上にあり，しかもＨは線分 DG の中点となることを証明せよ。(筆者作問)

解.　題意により

$$E = C_2D_1,\quad H = A_1B_2,\quad F = (A_1B_2)_3C_3 = A_1B_2C_3$$

従って２点 E, F を結ぶ直線は，x を変数とすれば



第10図

$\overline{EF}=(C_2D_1)_{3x}(A_1B_2C_3)_6$（変数のとり方は自由）*

$=C_{2x}D_xA_1B_2C_3$

$=A_1B_2C_{2x+3}D_x$

直線 EF と面 ABD の交点はＣを含まないから交点においては

$$2x+3=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{3}{2}$$

$\therefore \quad G=A_1B_2D_{-\frac{3}{2}}$

$=(A_1B_2)_3D_{-\frac{3}{2}}$

$=(A_1B_2)_2D_{-1}$

$=H_2D_{-1}$

この式は，Ｇが線分 $\overline{DH}$ を２：１に外分する点であること，つまり点Ｈは線分 DG の中点であることを示すものである。

*(註)　例えば直線 AB を変数 x を用いて，表示する場合，A_xB_1 としてもよいし，$A_{3x}B_2$ と書いてもよい。結果は同じである。本題において，直線 $\overline{EF}$ を仮に次のように表わしてみる。

$$\overline{\mathrm{EF}} = (\mathrm{C_2D_1})_x(\mathrm{A_1B_2C_3})_1$$
$$= \mathrm{C_{2x/3}D_{x/3}A_{1/6}B_{2/6}C_{3/6}} \qquad \text{（比例係数を6倍する）}$$
$$= \mathrm{C_{4x}D_{2x}A_1B_2C_3}$$
$$= \mathrm{A_1B_2C_{4x+3}D_{2x}}$$

Cの比例係数を0とおけば

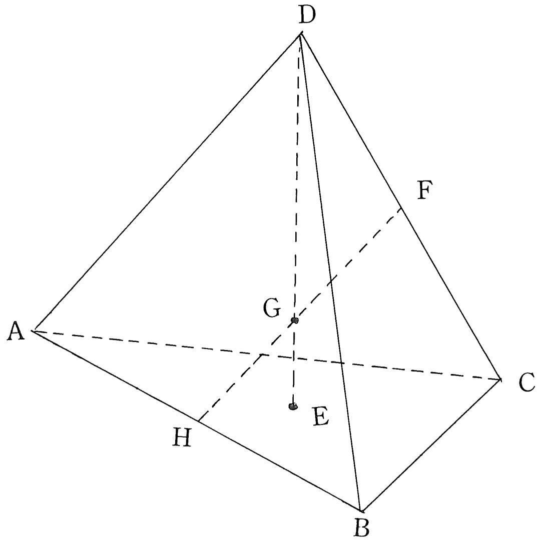
$$4x + 3 = 0 \qquad \therefore \quad x = -\frac{3}{4}$$

これより　$\mathrm{G} = \mathrm{A_1B_2D_{-3/2}}$

$$= (\mathrm{A_1B_2})_2\mathrm{D_{-1}}$$

となり結果は同じである。したがって組成式の変形法則をうまく利用して，なるべく計算が繁雑にならないように比例係数を選定すると計算が楽である。

問題4.4　四面体の1つの頂点とその対面の重心を結ぶ線分を3：1に内分する点Gは，対辺（四面体の同一平面上にない2辺）の中点を結ぶ線分の中点であることを示せ。（室蘭工業大）



第11図

解. 四面体ABCDにおいて（第11図），辺 $\overline{CD}$ とその対辺 $\overline{AB}$ の中点をそれぞれF，Hとする。

まず△ABCの重心（3中線が一点に会する点）の座標を求める。Aと $\overline{BC}$ の中点を結ぶ直線は $A_xB_1C_1$ で表わされ，またCと $\overline{AB}$ の中点Hを結ぶ直線は $C_yA_1B_1$ で表わされるから，交点Eの座標は

$$E = A_xB_1C_1 = C_yA_1B_1 = A_1B_1C_1$$

故に
$$\begin{aligned} G &= D_1E_3 \\ &= D_1(A_1B_1C_1)_3 \\ &= A_1B_1C_1D_1 \\ &= (A_1B_1)_2(C_1D_1)_2 \end{aligned}$$

または $=(A_1D_1)_2(B_1C_1)_2$

または $=(B_1D_1)_2(A_1C_1)_2$

これらの式は，とりもなおさず，点Gが，相対する2辺の中点を結ぶ線分の中点であることを示すものである。

（註） 参考のために，ベクトルによる解法の概略を示せば次の通りである。（本論による解との類似が見られる。）

解, 頂点A，B，C，Dの位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せば，△ABCの重心 E_1 の位置ベクトルは

$$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

であるから，線分 $\overline{AE_1}$ を3：1に内分する点Gの位置ベクトル $\vec{x}$ は，

$$\vec{x} = \frac{\vec{d}}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

同様にして，他の頂点とその対面の重心を結ぶ線分を3：1に内分する点の位置ベクトルを求めると同じ結果になる。

そこで
$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから，点Gは対辺の中点を結ぶ線分の中点であることが証明される。

—— 終 ——