

## 三つの経済学革命とその伝承（Ⅷ）

甲斐原 一 朗

### 〔ⅢⅦ〕 経済問題の数式化

（A）ワルラス革命の一つの大きな貢献は、それまでの記述的方式にかえて交換の問題を連立方程式の形で展開したことにあった。それ以後、数学の範囲を拡大しつつ、経済理論を数式を用いて展開・前進させたことは確かである。それはむしろ過大だとも思われ、それに対する批判も大きい。

他方労働価値説にたつマルクス経済学においては、ある時期まではごく簡単な初等数学の使用および若干の先駆的例外を除いては、その利用は極めて限られており、数理経済学に対する十分な理解に基づく内在的批判も徹底的には行われていなかった。（たとえば L.von Bortkewicz “Wertrechnung und Preistrechnung im Marxschen System”）しかし戦後数学を積極的に利用する傾向が、我国をはじめ、東欧諸国、ソビエトにおいてもそれほど珍しくはない事態にまで進んできた。他方この傾向に対し根本的な批判をい多く人々もあらわれてきた。たとえば是永・岩崎は（計量経済学を主要対象とするものであったが）次のように批判している。①マルクス経済学と近代経済学の基本的な相違点は、前者が矛盾の自己発展として、経済変化の原因を経済の内部矛盾としてとらえるのに対し、近代経済学は現象記述的であり、変化を説明する場合、その原因を経済の内部からではなく、外部からしか与えない。②近代経済学で用いられるモデルは単に現象記述のための道具に過ぎず、その作成は極めて恣意的になされる。これは基本的に公理主義という科学方法論の思想に支えられている。またパラメーター不変の仮定は非現実的である。③確率モデルでは偶然項が無反省に導入されている。④とくにマルクス経済学においてモデル

分析を行うことは極めて危険である（たとえば O.Lange では労働価値説の放棄がみられ、人と人の関係を取り扱うマルクス経済学が単なる物と物を取り扱う近代経済学と同一の立場におちいつている）。

数学が取り扱う対象はすべて量的に測定可能なものに限定されているが、経済学には、人間的な要素や心理的な要因が介入するため、あるいは重要な要因を測定する方法がないため、数学を利用できないという議論がよく聞かれる。しかし数学適用について（経済学と対照される）物理学も、16世紀前後では現在の経済学の状況よりもましだったとは必ずしもいえない。また要因測定方法についても、熱力学発展以前の熱理論では量的測定の可能性は、現在の経済学よりも有望だったとはいえない。熱の量と質、つまり熱エネルギーと温度の測定は、じつは数学的熱力学の‘成果’なのであり、その‘前提条件’ではなかった。

なお経済的諸量が無限分割を許さないことがあげられる。このことは微積分、したがって数学利用と両立しないというのである。しかし物理学・化学における不連続的な原子論、電磁気学における量子論などおよびこれらの諸部門における解析学の成功からみて、そのような異論は理解しがたい。経済理論なるものは“社会現象”したがって人間的現象の研究であり、人間の心理状態を入れねばならないから物理学などになぞらえることはできないという議論もある。一つには経済問題があまりに曖昧な“言葉”で叙述されていたために問題の本質が明確さをかぎ、数学的用具が適切に利用されなかったこともある。（ワルラス革命は偉大ではあったが、変数と方程式の数を一致させるだけで、経済の一般均衡を決定しようとする試みは、数学用具の適切な利用であったとは必ずしもいえない。あるいは文章的表现を単に記号の形に焼きなおしただけに終わったという批判もいちがいには否定できない）。

つぎに経済学の基礎知識が決定的に不十分だということもあげられる。17世紀の物理学とくに力学の領域で生じた決定的な展開は、それ以前の天文学の蓄積があつてはじめて可能となったのである。（プラーエがいなかったらケプラーやニュートンの出現は考えられななかつたであろう。）経済理論の数学的取り

扱いについての不満の一つは、単に命題が述べられているだけで、証明が提示されたことが少ないことであるが、それには新しい数学部門が創設されねばならないかも知れない。たとえばニュートンによる力学という理論的分科の創設は微積分学の発見を引き起こしたし、逆にニュートン力学は微積分学の発見と切り放しては考えられない。少なくとも経済理論の発展には新しい数学分野の模索は不可欠であろうし、革命伝承者の重要な任務であろう。数学化されたあらゆる科学はこれら一連の発展段階を通過しているのである。

ところでマルクス経済学における数学利用の問題でいえば、量的に測定可能な現象に限定するかどうかは二つの経済学を分つ基準でもなく、数学利用ということも（数学を狭く理解するのでなければ）数学は量的に測定可能な事象のみに有効、経済事象は質的認識が重要という議論によって経済学における数学利用を否定することもできない。数学利用が問題となるのは数学的方法を含む記号論理、もっと一般的に形式論理と、マルクス経済学の基本的思考である唯物弁証法とがどう関係するかであると松田和久はいう。（「マルクス経済と数学利用」経済評論1965年）

(B) 唯物弁証法と形式論理との関係についての議論の中心は‘矛盾律’にある。

唯物弁証法が事物の内部にある自己矛盾の発展として運動の過程を把握するのに対して、形式論理学ではAと非Aの同時的存在は、言語規則としてこれを認めない（ $\sim \{A \wedge \sim A\}$ ）。唯物弁証法での矛盾の認識については、必ずしも統一されてはいない。たとえば中村秀吉は、客体そのものの発展、認識の深化、関心の変遷は人々をしてこの形式論理上の矛盾律を犯さしめるという。たとえば新しい発見が行われたとき‘これは生物であり、同時に無生物である’という言い方をしなければならないことがあり、これが科学の進歩をもたらすであろう。このような解釈は形式論理における矛盾律の否定のうえに成り立つ。他方科学の発達はいつまでも、この矛盾の状態を放置しておくのではなく、やがて矛盾律は回復され、さらに新しい矛盾の認識とその回復という過程を繰り返して発展すると考えられる。

松田は、唯物弁証法において用いられている矛盾概念は、形式論理で言語使用規則として規定されているAと非Aの間の矛盾といったものとは異なる意味でとらえられているという。たとえば価値と使用価値の対立というのは、一つの商品という統一物の中に見いだされる人間関係と物的素材という現実的な矛盾から規定されるのであって、どこまで行っても言語規制の意味での矛盾とは異なった性質をもつという。商品の性質は質と量によりあますところなく規定されるが、この二つは商品という実体における現実存在する矛盾であって、言語規則上の意味での矛盾ではない。矛盾律が犯されるような相対立する要素が存在すること、したがってその事実の認識こそが重要で、認識の深化はやがて言語規則としての矛盾律が犯さないような言葉に至らしめるであろう。そうしてさらに深化した段階で、新しい矛盾が出現し、それがまた解決されるという無限の過程が弁証法的過程であろう。

近代経済学においては、資本、労働、利潤といった概念は、それ自身一つの現実に対立する矛盾を含む概念としては把握されておらず、そこでの数学利用からは、経済的過程全般が矛盾の自己発展という解はえられない。この矛盾を基本におくマルクス経済学において数学利用が否定されねばならないということにはならない。

(C) 近代経済理論の基本的な概念である‘効用’は、はじめには測定可能なもの、すなわち一つの数で表せるものと考えられていたが、やがてそれが仮定していた効用の可測性に対し異議が提起された。“測定可能”ということは、究極的には“直接的な感覚”に根ざしていなければならぬ。効用の場合、‘選好’つまり一つの物が他の物より好ましいという直接的感覚がその基礎をなしている（‘無差別曲線’の手法は、このような状況を記述する一つの数学的方法である）しかしここでいえるのは、一人の人間にとってある物の効用が他の物の効用よりも大きいということだけである。選好だけでは一人の人間の効用を数値的に表すための基礎にもならず、ましてや異なる人の間の効用を比較する手段にもならず、効用は非数値的なものという仮定はもっともらしく思える。

同じことは熱力学についても存在した。初期にはある物体が他の物体よりも熱いと感じる直接的に明確な感覚に基礎をおいたが、どのくらい熱いかを客観的に表現する直接的な方法はなかった。その後熱は一つの数ではなく、熱量と温度という二つにより量的に記述できることがわかった。さらに温度はどんな直接的な意味でも加法的ではないが、エントロピー定理に関連した絶対温度の役割から温度にも厳密な数値的尺度の導入が可能となったのである。

(D) 経済選好を考える場合、効用の単なる比較可能性から効用‘差’の比較可能性の問題、さらに確率付きの事象の結合（試行）へと発展する。

ここで選好体系が包括的で完全であるような個人、すなわちどんな二つのものに対して、またどんな二つの仮想の事実に対して、どちらが好ましいかははっきり明言できるような人間をしばらく想定しよう。

二つの事象をB,Cとして、(簡単のため) それらが5分5分の確率で生起するとする。ここでそれらの‘結合’とは、Bが50%の確からしさで(Bがおこらなければ)Cが残りの50%の確からしさで起こるという見込みのことである。この場合 ①B,Cは互いに背反し、同時に起こることはない ②そのどちらかは必ず起こるのである。

ここである個人は、事象AとB,Cの5分5分の組み合わせを比べて、Aの方が好ましいか、あるいは逆が好ましいかについては明確な直観をもっているとする。もし ①彼にとってBよりもまたAが好ましいとすれば、B,Cの結合よりもAが好ましいことは明らかである ②おなじく彼にとってAよりもB,Cが好ましいとすれば、Aよりもこの結合の方が好ましいであろう。③しかしたとえばBよりもAが好ましく、同時にAよりCが好ましいときには、この結合よりもAが好ましいという確言は本質的に新しい情報を含んでいることになる。このとき彼はB,Cの5分5分の結合よりもAが好ましいとすれば、Bに対するAの選好の方がAに対するCの選好よりも大きいということであり、ここから数値的評価に対する基礎がえられることとなる。この考え方が受け入れられるならば、Aに対するCの選好と、Bに対するAの選好とを比較する基準

がえられたことになり、これから効用あるいはむしろ効用差を数値的に測定できるようになる。

A, B, C の間でこの程度の比較ができれば、効用の“隔たり”の数値的測定に十分であるということは、経済学ではパレートが指摘しているが、これと全く同じ議論が、直線上の点の位置について2000年前にユークリッドが行っており、これが数値的距離を導く古典的方法の基礎であった。さらに任意の確率を使うことができれば、この数値的尺度の導入はもっと直接的に達成される。三つの事象 C, A, B を考えて、これらに対する個人の選好順位がこのとおりであったとする。A が、C に確率  $\alpha$  を、B に  $1 - \alpha$  を付与した結合とちょうど同じ程度に好ましいとする。このとき  $\alpha$  は B に対する A の選好と C の選好との割合を数値的に表すものとして使うことができる。ただしここでは確率というものを長期間にわたる相対頻度として解釈している。

ところで個人が二つの事象のいずれが好ましいともいえないし、それらが同じくらい好ましいともいえない場合も考えられる（それがむしろ現実的かもしれない）が、ここでは一般的に用いられる無差別分析も適用不可能となる。個人の選好が比較可能だといえないならば、無差別曲線は存在しないし、個人の選好が比較可能であれば、一意的に定義された数値的効用がえられて、無差別曲線は余分なものとなる。

(E) 科学においては、元来は数学的ではないが、物理的な世界のある側面に付随した量がよく出て来る。これらの量は、物理的に定義されたある種の自然な演算が施しうることによりいろいろな種類に分けられる。たとえば‘質量’という物理学的に定義された量には‘加法’という演算が可能であるし、‘距離’という物理的幾何学的に定義された量にも同じように加法の演算が可能である。他方‘位置’と定義された量には、加法という演算は許されないが、二つの位置の‘重心’を作るという演算は可能である。また普通‘ベクトル量’とよばれている速度や加速度のような物理的幾何学的な量にも加法の演算が可能である。

ただしこのような‘自然的演算’に、たとえば上記の‘加法’のような‘数学的演算’を連想させる名前がついている場合にも、その二つの演算が全く同じだと主張するためではなく、それらの演算が同じような特徴をもっていること、またそれらの間に最終的にはある対応が確立される望みがあることを意味しているに過ぎない。対応づけがもし可能だとすれば、問題の物理的領域に対する数学的モデルを見付けることが重要であり、その中ではこれらの量は数によって表現され、従ってモデルのなかでの数学的演算がそれと同名の‘自然的演算’を表すようになるのである。前述のエネルギーや質量は適当な数学モデルの中では数で表され、自然的加法は普通の算術的加法となり、位置もベクトル量もそれぞれ座標、成分とよばれる三つの数の組で表される。二つの位置  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(x_1', x_2', x_3')$  の重み  $\alpha, 1-\alpha$  付きの重心（二点の質量  $\alpha, \beta$  につき総質量 1 となるよう調整）という‘自然的’概念は

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_1', \alpha x_2 + (1-\alpha)x_2', \alpha x_3 + (1-\alpha)x_3)$$

で表され、同じくベクトル  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(x_1', x_2', x_3')$  の‘加法’という自然的演算は  $(x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3')$  という数学的操作で表せる。

さらに上の意味での物理的領域に対する満足すべき数学モデルが見いだされ、考えている物理量が数によって表されたとしても、このモデルによる記述が、必ずしもその物理量に数に対応させるただ一つの方法というわけではない。そのような記述によっては対応の総体、数学的には‘写像’の‘族’全体が指定されるだけで、その中のどの対応をとってもそこでの理論には差し支えない場合がありうるからである。一つの対応から他の対応への移行によって、この物理量を表す数値のある変換が引き起こされる。その場合問題の物理量は‘変換の系を除いて数で表される’というが、このような変換の系は数理的には‘群’といわれるものになる。たとえば距離という幾何学的概念は、定数を掛けることを除いて数で表される（ユークリッド幾何学では距離の単位は絶対的には定まらない）。質量という物理量は同じであり、またエネルギーという物理的概念は一次式変換、すなわち定数を足した掛けることを除いて数になる。位置

という概念は非斎次変換を除いて数の組によって表され、ベクトルという概念は同じく斎次直交変換を除いて数の組で表される。

(F) ある物理量がある変換系を除いて数になると考えられる場合もある。これは‘より大きい’という自然的関係しか存在しない場合であるが、たとえば‘より熱い’という概念しか知られていなかった時代の温度の場合がそれである。ある物理量がある変換系を除いて数になるとして、その変換系は（時代とともに）その問題の発展段階とともに変化することがありうる。たとえば温度の場合、それは最初単調変換だけを除いて定まる数であったが、温度測定、とりわけ理想気体による温度測定法の進歩とともに、変換系は一次式変換に狭められることになった。つまり絶対温度と絶対単位が欠けているだけになったが、その後の熱力学発展は絶対温度を固定することとなり、熱力学における変換系は正の定数倍だけから成ることになった。効用についても事情は同じ無差別曲線の手法によく現れている。ただ変換系を狭めるためには、効用の領域でもっと多くの自然的演算or関係を見付けださねばならない。

ある特定の方法が失敗したからといって、他の方法で同じ目的が達成できないと考える必要はない。たとえば二つの効用を二つの相補的な確率  $\alpha, 1-\alpha$  をつけて結合することを考える（前述の重心の形成に類似する）。

効用  $u, v$  に対し自然的関係  $u > v$  および自然的演算  $\alpha u + (1-\alpha)v$  を考えるとする。（前者は  $u$  が  $v$  よりも好ましいということであり、後者は  $u$  を確率  $\alpha$  で  $v$  を  $1-\alpha$  で選ぶことを表している）これらの概念とその再現可能な測定が認められれば、効用に関する関係  $u > v$  と演算  $\alpha u + (1-\alpha)v$  とを数に関する同名の概念に移すような効用と数との間の対応をみつければよい。この対応を

$u \rightarrow \rho = v(u)$  ( $u$  は効用,  $v(u)$  はこの対応によって効用に付与される数)

とすれば、われわれの要請は (E. 1)  $u > v$  ならば  $v(u) > v(v)$  (E. 2)

$v(\alpha u) + (1-\alpha)v = \alpha v(u) + (1-\alpha)v(v)$  である。仮にこのような対応が

二通り存在して (E. 3)  $u \rightarrow \rho = v(u)$  (E. 4)  $u \rightarrow \rho' = v'(u)$  となったとす

れば、数の間のひとつの変換  $\rho \Rightarrow \rho'$  がひきおこされ、(E. 5)  $\rho' = \psi(\rho)$  と



かくこととなる。このとき関数  $\psi(\rho)$  は関数  $\rho > \sigma$  と演算  $\alpha \rho + (1 - \alpha) \sigma$  を保存するはずであり、したがって  $\psi(\rho)$  は一次式変換 (E. 6)  $\rho' = \psi(\rho) = \omega_0 \rho + \omega_1$  でなければならない。すなわち効用のこのような数値的評価が存在するならば、‘効用は一次式変換を除いて数となる’ となるのである。

(G) 上の意味での数値的効用の存在をいうためには、効用に対する関係  $u > v$  と演算  $\alpha u + (1 - \alpha) v$  とのいくつかの性質を“公理化”することが必要であり、公理系を選定し、それらを数学的に分析することが問題となる。

公理系を選択することは、必ずしも純粋に客観的な仕事とはかぎらない。普通公理系はそれから一連の定理が導かれねばならず、この限り問題は正確で客観的である。ところがこれを越えたところに、それほど客観的でない他の重要な要請がつねに存在する。つまり公理系はあまり多くてはならないし、できるだけ単純で明確なものであってほしい。

われわれの問題に対する“一つの”公理系は次の様に考えられる。なんらかのもの  $u, v, w \dots$  の系  $U$  を考える。 $U$  には、関係  $u > v$  と任意の数  $\alpha$  についての演算  $\alpha u + (1 - \alpha) v = w$  があたえられている。これらの概念は次の公理を満たしているとする。

(a)  $u > v$  は  $U$  における‘全順序関係’であり (a. 1) 任意の二つの  $u, v$  に対して、三つの関係  $u = v, u > v, u < v$  のうちの一つ、ただ一つだけが成立する (a. 2)  $u > v, v > w$  ならば  $u > w$

(b) ‘順序関係と結合演算’ (b. 1)  $u < v$  ならば  $u < \alpha u + (1 - \alpha) v$   
 (b. 2)  $u > v$  ならば  $u > \alpha u + (1 - \alpha) v$  (b. 3)  $u < w < v$  のとき不等式  $\alpha u + (1 - \alpha) v > w$  を満たす  $\alpha$  が存在する (b. 4)  $u > w > v$  のとき、不等式  $\alpha u + (1 - \alpha) v > w$  を満たす  $\alpha$  が存在する

(c) ‘結合演算の性質’ (c. 1)  $\alpha u + (1 - \alpha) v = (1 - \alpha) v + \alpha u$   
 (c. 2)  $\alpha(\beta u + (1 - \beta) v) + (1 - \alpha) v = \gamma u + (1 - \gamma) v$  (ただし  $\gamma = \alpha \beta$ )

これらの公理から性質 E. 1, E. 2をもつ対応 E. 3 の存在が導かれる。従って(抽象的な)効用の系である  $U$  は一次式変換を除いて定まる数の系となる。

なお上の公理系 (a) (b) (c) に基づき、寫像  $u \rightarrow \rho = v(u)$  を作ることはよく行われている純粹に数学的な仕事である。

また公理系 (a) (b) (c) の直感的意味とその妥当性は次のように説明される。

(a) 全順序関係の (a.1) は個人の選好体系の完全性を表しており、無差別曲線分析では一般にこれが仮定されている。また結合演算の (a.2) は選好の‘推移性’で、一般に認められている。

(b) 結合演算の (b.1) は、もし  $v$  が  $u$  よりも好ましいならば、 $v$  に確率  $1-\alpha$  を、 $u$  に確率  $\alpha$  を付与したとき、 $v$  は  $u$  より好ましい。また (b.3) は上の双対であり、‘好ましい’を‘好ましくない’に変えただけである。(b.3) は  $w$  が  $u$  より好ましく、また  $v$  が  $w$  よりもさらに好ましいとすれば、 $v$  に確率  $1-\alpha$  をつけて  $u$  と結合しても、この確率  $1-\alpha$  が十分小さいものである限り、 $w$  の方がそれより好ましいことは変わらない。いいかえれば  $v$  自身がどれほど望ましくとも、これに小さな確率を付与することにより、その影響を望みのままに弱めることができる。これは‘連続性’についての妥当な仮定である。(b.4) は上の相対で、 $u, v$  の結合がその成分  $u, v$  の順序によらないことを表わしている。成分が互いに‘余事象’になっているからである。

(c.2) は  $u, v$  を引きつづく二つの段階で（まず確率  $\beta, 1-\beta$  で、ついで  $\alpha, 1-\alpha$  で）結合しても、一つの演算  $\gamma, 1-\gamma$  ( $\gamma = \alpha\beta$ ) で結合したものと結果としては同じになることである。

(H) さらにいえば、(E.2) は効用の数値が数学的期待値と同じく（確率をつけて）結合できることを述べている。他方“一か八かの賭け”というような、ただ一回限りの行為の効用というものは、数学的期待値とは両立しないものであるが、個人にとってそのようなものが存在しないとはいえないだろう。公理 (c.2) は数学的期待値を使うのと結果としては同じことになるが、この公式をみたとすような数値的効用が、(a)～(c) の基礎の上に作り出されるという事実は、ここでは実際に数学的期待値の計算が適用できるようなものとして数値的効用が定義されていたということである。公理系 3. a～3c からそれに必要な概

念構成が保証されるので“賭けの特殊な効用”というような概念は、この公理系の枠内では矛盾なしに定式化することはできないのである。

さらに順序の完全性の問題である。ある人が効用  $u, v$  をもつ二つの場合のどちらが好ましいかをつねに決定できるかは疑わしいとしても、この可能性すなわち個人の選好体系の完全性は無差別曲線分析に対しても仮定しないわけにはいかないのである。しかし  $u > v$  に関するこの性質を仮定すれば、はるかに疑義の少ない演算  $\alpha u + (1 - \alpha)v$  を用いて、数値的効用もえられるのである。

完全比較可能性の仮定がなくても  $\alpha u + (1 - \alpha)v$  に部分的比較可能性に基づき数学的理論を作ることでもでき、それから‘多次元ベクトル’としての効用概念が導かれる。

総ての経済主体が客観的な状況の物質的条件を完全に知っているとして、経済主体は統計的、数学的なすべての演算を行うと考えてきた。(情報完備性)

ところで‘一定の物質的条件と自由に処分できる一定量の諸財をもつ独立した個人’はそこでえられる効用の最大値を決めることができる立場にある。この最大値というのははっきり定義できる量であるから、個人の蓄積に、特定の財一単位が加えられたときに生ずる最大効用の増加分についても同じことがいえる。(古典的意味での限界効用である)しかし‘社会的交換経済の参加者’の行動決定の場合の限界効用の意味は‘戦略ゲーム’の理論にまたねばならない。

(Ⅰ) 社会的交換経済の参加者の“理性的行動”を規定する数学的に完全ないくつかの原理をみつけ、それからそのような行動の一般的特徴‘解’をみいだすことがここでの問題である。

① 解とは、各参加者に対して起こり得ると考えられる総ての状況のなかで、どう行動すべきかを指示する一組の指針と考えてよいだろう。しかしそれでは広すぎるという批判がある。合理的な社会で生起する状況と異なる状況における行動について個人的忠告を与える必要はなかろう。他人の側にも同じく同様な理性的行動だけがあると考えてよいだろうし、そしてこのような手続きから

状況の一意的な連鎖が導かれるだろうというのである。この異義は次の理由から排除される。

(a) “ゲームの規則”すなわち考えている経済行動の現実的背景をなす物質的条件は統計的法則であることが多い。従って経済参加者の行動の結果は‘既知の確率をもつ’偶然に依存する事象との関連ではじめて決まってくる（完全に合理的な社会においてさえ）行動指針は極めて多様な状況に対処するものでなければならず、（最適）にできないものもありうる。(b) さらに理性的行動の指針は他人の側に‘非’理性的行動がありうることにに対処できねばならない。各参加者が理性的方針をとるとし、誰にも最適の結果が保証されるが、かりに指針をまもらない参加者が有利に、守る側が不利になるとしたら、上の解は疑問となる。

ここでは日常行われているゲームの考え方と非常に近似する。この類似性は極めて重要で、物理学のなかでは幾何学的・数学的モデルが見事な役割を果たしたが、経済問題に対してはゲーム論がそれと同じ役割を果たすこととなる。さらに市場問題に限らずあらゆる場合に妥当すると考えられる。(c) この意味で、考えている参加者が理性的に行動した場合、彼がどれだけの額を入手出来るかを述べればよく、この“手にいれることができる”というのは最低限としての話であり、他の参加者が誤りを犯すなら、彼はもっと多くの額を手に入れることになるかも知れない。

(J) これまでのところ、解が一人の参加者に対しどうあるべきかであったが、これから‘全’参加者を同時に視野に入れることとする。参加者が一定数の‘ $n$ 人ゲーム’が問題となる。解が何人かの参加者が獲得する利得の額を指定するだけのことであれば、解は“配分”という概念（利得総額が参加者の間にどう配分されるか）と一致することとなる。ここでの社会構造には各参加者の量的な取り分が正確に決定されるような‘絶対的な均衡状態’が存在することになるであろう。（このようなゲームの場合、各参加者は適切に理性的に行動することにより、少なくとも自分に帰属するだけの額を獲得でき、他のものが

理性的に行動しない場合、それ以上の額を入手できるかも知れない。(零和二人ゲームである)

① ここで‘零和’の条件を取り除けば、二人の参加者の相互依存性とその行動にともなう総効用の可変性が考えられる。これは‘双方独占’の場合で、ここでの配分問題では‘不確定性’が障害となる。

② も一つの‘二人’を除けば、利得0の三人ゲームとなるが、その本質的特徴はどの二人のプレーヤーも第三のプレーヤーに対して連合して協力し、有利性を確保できることにある。問題は、この有利性による利益を連合した二人の間にどう分配すべきかである。一つの連合が形成されつつある間にも、各参加者は頼りにする同盟者が彼を裏切って第三の参加者と提携することもあると考えねばならない。‘結託’の維持のため、結託の参加者は進んで仲間に保証を支払うことも考えられる。三つの同盟とそれらの配分を合わせてはじめて合理的な全体が形成されるのである。

これらの詳細はここでは省略して、初めにかえり、解をただ一つの配分として考えることとすれば、その解は他の総ての配分に‘優越’した配分でなければならない。それは環境の物質的、社会的構造を考慮して定式化されねばならない。さらに明確には、配分  $x$  が配分  $y$  に優越するということは、より明確には  $x$  が  $y$  を‘支配する’というべきであろう。支配という概念は、選好の場合の‘順序づけ’と類似するごとくであるが、ここでの支配には推移性はなく、解は次のように定義される。

要素(配分)の集合  $S$  が解であるというのは、それが次の二つの性質をもつときである。(4. a)  $S$  にふくまれるどの  $y$  も、 $S$  に含まれる  $x$  によって支配されない、(4. b)  $S$  に含まれないどの  $y$  も、 $S$  に含まれる  $x$  によって支配される。

この二つは (4. c)  $S$  の要素によって支配されないような要素の全体であるまとめることができる。(ただ一つの要素  $x$  からなる集合  $S$  に対しては  $x$  が第一要素(最大元)であることを表す) さらに上の (4. c) は(詳細は省略するが)  $S$  に対し循環的すなわち陰伏的であるから、 $S$  が実際に存在するかどうか

か、また存在するとしても一意的であるかどうかはまだわからない。(ここではSを定義したのではなく、その性質を定義したのである)

ところで‘配分の集合’の概念はあまり知られてないが、社会現象の確立された他の概念との関連を考えるとすれば、まず集合Sは社会組織と結び付いた“行動基準”に対応していると思われる。社会の物質的基礎が与えられている場合、人はそれに自己を順応させていく独特な方法を身につけているが、それは多様な選択の可能性を意味している。そのような配分の系は‘確立された社会秩序’あるいは‘公認の行動基準’を表している。このような配分をでたためにまとめても行動基準とはならない。配分の系はそれを特徴づける事物が‘安定性’を備えていなければならぬ。前述の集合Sは行動基準に相当し、解Sを特徴づける前記の条件(4a)と(4b)あるいは(4c)はこの意味での安定性を表しているのである。

定義の条件を4a, 4bの二つにわけたことは適切であった。yがxに‘支配’されるということは、配分xが考慮されるならば、配分yが拒否されるということであったが、(それはどのような配分が最終的に受け入れられるかを言うのではなく)従って①(4a)は行動基準が内的矛盾のないこと、すなわちSに属する(公認の行動基準に合致する)どの配分yも、同じ性質をもつ別の配分xにより支配されることなく②(4b)はどのような非公認の手続きも行動基準によって拒否される(支配される)ことを示している。③公認の行動基準に合致するyがあるxにより支配されることがあるかも知れないが、このときxは公認のものではないことになる④こんどはxが公認の第三の配分zにより支配されるとすれば、yとzはともに公認されているから、zはyをくつがえすことはできない。(支配の非推移性である)

(K)最後に理論の静態的性格と動態的性格の問題がある。これまでの理論はあくまでも静態的であったが、動態理論の方が好ましいが、静態的側面が十分開明されない限りそれは不可能である。静態理論は均衡を取り扱うものであり、均衡の本質的特徴はそれが変化の傾向をもたないということ、すなわち動的発

展に導く要因がないということである。そこではある種の初歩的な動態要因を利用しなければならないであろう。動態理論が見つかったとしたら、おそらくそれは単純な単一の配分を用いて変化を記述するものとなるし、さらにその単一成分は瞬間ごとの有効さしかもっていないだろう。このことは理論のこの部分の形式的構造、つまり静学と動学との間の関係が古典的な物理学理論の場合とは全般的に異なることを示している。ここでの数学的方法の力点は、数理物理学で支配的な微分方程式の解法から離れて集合論、位相論へ傾斜していくであろう。

さらにマルクス経済学の数式化に関連してモデル分析が批判されているが、松田は次のように主張する。

① モデル分析は、最も広く解釈すれば‘演繹的な推論体系’によって研究を進めるということであり、狭い使い方では、数学や統計学の利用によって、推測可能な演繹体系による推論を行うことをさしている。ここで次の諸点が指摘される。①モデル選定において線形体系を選ぶか非線形を選ぶかの問題は、どのような経済理論から出発するにしろ、いずれにしても‘現実’からある程度の幅をもつことはさけられない。(どれを選ぶかは便宜の問題であろう) ②マルクス経済学におけるモデル分析の中心的問題は、演繹的な推論体系のマルクス経済における地位の問題である。マルクス経済学においては、社会における事象は、矛盾の対立、抗争として発展するという世界観および、実在についての‘絶対的’真理に向かってどれだけでも現実の‘相対的’真理を近づけうるという確信のうえに立っている。そしてこの世界観と確信はきわめて永い無数の歴史的事実からえられたものである。この立場が貫かれる以上演繹的方法やモデル分析は、認識や実践にとって有効だし、マルクス経済学の立場と矛盾するものではない。③モデル設定の‘恣意性’はさけられない。モデルは現実そのものの描写ではなく、現実のうち最も重要なものだけが抽象される。(これは一切の科学に共通である)それは基本的には世界観により導かれるが、そのうえに立って、しかしある段階のモデルはそれを含むもっと広いモデルを想定しなければならない。その段階の一つ一つにおいてモデルがもつ恣意性を

減じ、極小化する努力がなされる。（これも一切の科学に共通である）

どのような基本的な社会に対する考え方にもとずいて、各段階におけるどのような手続きにより社会における必然的法則を理解しうるかが重要な問題である。

### 〔ⅢⅧ〕 静的均衡—模索過程

メンガー、ジェボンス、ワルラスは1870年代、‘限界効用’概念のうえに新しい理論体系を作り上げた。

彼らは、一定量の財がこれを消費する特定の個人の欲望を満足させる程度（個人主観的な効用）から出発し、この個人がこの財を単一用途（または順序づけられた諸用途）に一単位づつ降り向けるとき、最後の一単位（限界単位）に負う効用（限界効用）が次第に減少する傾向を発見して、‘限界効用の通減法則’を定立した。この場合消費者はそれぞれの単位をどのような順序にでも消費できるから、どの単位も限界単位と同じものとして評価され、‘どの個別単位の価値も限界効用に等しい’こととなる。さらに交換経済にあっては、個人は一定額の所得をもち、諸財は一定の市場価格をもつから、この所得で買うことのできる諸財からえられる効用の総和が極大となるように所得を配分する限り、一所得単位でえられる各財の限界効用は均等となる。それと同じことであるが、各財の限界効用をその価格で割った商が相等しい状態、すなわち‘各財の限界効用の比がその価格の比に等しい’状態に達してはじめて用途変更は停止される。彼らはこのような‘個別経済的な’‘均衡状態’を規定する法則を‘限界効用均等の法則’と定義し、これこそが個人の経済行為の合理性を表現する最後の根拠と考えたのである。彼らはさらにこれを基礎として‘交換経済社会’全体の機構分析に多くの努力を傾けたのである。

ことにワルラスは、限界効用理論の主唱者としてよりも、これを基礎とした‘一般均衡理論’の数学的体系をはじめて形成した学者として大きく貢献したのである。

本来計画的に統制されている‘個別経済’（たとえば‘消費経済’）における所



得分配、‘企業経済’の資金配分)については、上述の‘静的一般均衡理論’が経験上当て嵌まるといって差し支えない。しかし‘市場経済’全体については、静的均衡理論が必ずしも経験に当て嵌まるとは限らない。

資本主義経済においては ①生産手段が私有されていて生産者は自己の個人的利潤計算を基礎とし ②消費者は自己の個人的消費判断を基礎として消費する ③他方資本主義的商品生産の社会的性質としては、生産と消費は一致しなければならず、資本制生産の基本的矛盾が、そこにあるといえる。

このような社会経済全体についてなお静的均衡の理論があてはまるかどうかについては、経験に照らして新たに検証されねばならない。ここからワルラスの‘予備的模索’の理論が展開される。

彼はまず競争取引分析の適用を正当化するため、市場を次のように定義する。

競争の点から最もよく組織化された市場は、売買が(たとえば仲買人、あるいは売買を集中する仲介者などが行う)競売の形で行われる市場である。このような市場では、いかなる交換もその条件が公開されることなしには行われず、売り手が互いに高く売ろうとし、買い手が互いに安く買おうとすることなしには行われない。株式、商品、穀類取引所および魚市場等がこのような働きをする市場である。このほかに多少の制限はあっても、競争が相応かつ満足に行われる市場として果物、野菜、家禽等の市場がある。さらにパン屋、肉屋、呉服屋等が並立した街は、競争の点からは十分に組織化された市場とはいえないが、それでもかなりの程度まで競争が行われている。医師や弁護士の仕事の価値を決定するのも競争である。

さらにワルラスは現実への一次近似として、理想的な十分組織化された市場での競争をあげ、そこには少なくとも二種類の競争取引の方法があるとする。

① 通常の方法では総ての取引は、市場に超過供給や超過需要が存在する限り暫定的であり、実行されない。個人が所有する財の量は‘模索’(あるいは手探りで進む)過程を通じて、最終的に均衡価格を見いだすまで不変のままである。

② 第二の方法では、たとえいくつかのまたは総ての商品に対し需給均衡式が

成立しなくとも、模索の各時点で任意の一組の個人が互いに取引に同意する可能性がある。このような契約は可能であり、個人の保有する財の量は時間とともに変化する。しかしこの取引はこの時点での価格では実行されない（総ての財の超過需要が最終的に市場で解消される時点での均衡価格で取引される）価格が模索過程で変化するにつれ、個人が売りたい、買いたいと思う量も変化するが、彼は異なる価格の下でなされた契約を解除して、適当な商品を第三者から買い直したり、第三者へ販売することがいつでもできる。

上述の模索過程について、森島通夫は次のように解析する。

(1) 第一の方法では、 $\bar{x}_i = (\bar{x}_{1i}, \dots, \bar{x}_{ni})$  を個人  $i$  の初期保有量とすると、価格  $p = (p_1, \dots, p_n)$  の下で彼の購買力は  $M = \sum p_j \bar{x}_{ji}$  である。彼がブライステーカーであれば、彼が保有しようとする商品の量  $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$  は、予算制約式

$$(1) \sum p_j x_{ji} = \sum p_j \bar{x}_{ji}$$

に従い、効用関数  $u(x_i)$  を最大にするように決定される。もしこうして決定される  $x_{ji}$  が所有量  $\bar{x}_{ji}$  を超過する（下回る）ならば、個人  $i$  は商品  $j$  を  $x_{ji} - \bar{x}_{ji}$  ( $\bar{x}_{ji} - x_{ji}$ ) だけ需要（供給）するであろう。しかしこれら個々の需要、供給は、各財への総需要が総供給に一致し、総ての財  $j$  に関し

$$(2) \sum_i x_{ji} = \sum_j \bar{x}_{ji}$$

が成立しなければ実行されず、個人は模索過程の最初と同じ量を保有したまま市場にとどまる。最終的に均衡価格に到達して (2) 式が成立するとき取引が行われて各人は彼が欲する商品の量  $x_i$  をもって帰宅できる。

第二の方法では、 $x_i^0 = (x_{1i}^0, \dots, x_{ni}^0)$  を模索過程のある時点  $t^0$  で個人  $i$  が保有する財の量、 $p = (p_1, \dots, p_n)$  をその時点での価格とする。彼は初期保有量  $\bar{x}_{ji}$  から模索を始め、 $t^0$  時点までに第  $j$  財を ①  $x_{ji}^0 > \bar{x}_{ji}$  ならば  $(x_{ji}^0 - \bar{x}_{ji})$  だけ購入し ②  $x_{ji}^0 < \bar{x}_{ji}$  ならば  $(\bar{x}_{ji} - x_{ji}^0)$  だけ販売していることになる。もし  $t^0$  時点での  $p$  が均等価格ならば、彼は購買支出から販売収入を減じた  $\sum_i p_j (x_{ji}^0 - \bar{x}_{ji})$  を支払わねばならない。他方彼は  $\sum p_j x_{ji}^0$  なる評価額をもつ財  $x_{1i}^0, \dots, x_{ni}^0$  を保有し、 $t$  時点での総購買力は

$$(3) \sum p_j x_{ji}^0 - \sum p_j (x_{ji}^0 - \bar{x}_{ji})$$

となる。これを制約として第  $i$  個人は新たに売買計画をたてる。つまり時点  $t^0$  で、財の保有希望量  $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$  を決定するのに、彼は  $x_i$  の  $p$  で測った総価値が、彼の購買力 (3) に等しいという条件の下で、効用  $u_i(x_i)$  を最大化するような  $x_i$  を選ぶ。ところで (3) は  $\sum p_j \bar{x}_{ji}$  に等しいので、時点  $t^0$  の予算制約式は、第一の方法による競争取引の下で成り立つ制約式 (1) に等しくなる。かくして二番目の方法の下でプライステーカーとして行動する個人は、所与の価格に対して第一の場合と全く同様に反応する。そこで第二の方法では、模索過程での個人間の取引がおこり、第一の方法では取引が行われなくてもかかわらず、個人の需要と供給では二つの方法の間に差はない。

経済諸量は、原因→結果という単線的な因果関係によってではなく、市場におけるこのような相互依存関係を通じて同時に決定され、経済諸量の‘均衡値’は‘連立方程式の解’として把握される。これがワルラスの核心的な考え方であり、彼は数学のもつ論証力を極めて高く評価し、当時としては前人未踏の成果をあげたことはよく知られている。

しかしその議論が前提とした‘効用の可測性’については疑問があり、長い論争が続いた。(ワルラス自身疑問をもち、まずそれを仮定して出発し、演算の結果から初めの仮定は承認できるとしたとも考えられる) フィッシャーは効用を直接に測ることはできないが、人間の財に対する選択行為によって間接にその大小を測定できるとして‘効用の序数的性格’を明らかにした。ついでワルラスの弟子パレートは、これを解析的方法により精緻化して‘選択指標説’を確立し、消費者の財に対する心理的反応現象を‘効用 or 選効’の概念として定式化した。基数的効用から序数的効用への移行にともない数学の方法も微分から位相論に移る(前述の二階堂の解析は、効用の数値化を否定したうえで不動点定理を適用して、ワルラス理論の成立を証明したのである)

(2) ここで現代の経済学者が‘模索過程の均衡’の存在をどのように証明するかを見よう。

$p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$  を競争取引の時点  $t$  で提唱される価格、 $E_j(t)$  を

その価格に対応した第  $j$  財の超過需要（すなわち  $E_j(p(t))$ ）とする。時点  $t$  で第  $j$  財への需要が供給を越える（下回る）ならば、競売人は超過需要に比例した量だけ  $j$  財の価格を高く（低く）する。この比例係数は（ランゲが‘価格伸縮度’とよんだものであるが）一般には財により異なるが、ここでは簡単のため総ての財について等しいとする。また価格伸縮度は価格水準に比例的であるとする。価格伸縮度は  $v \sum p_k(t)$  で与えられ、第  $j$  財の価格調整方程式は

$$(5) \quad p_j(t+1) - p_j(t) = v [\sum p_k(t)] E_j(t) \quad (j=1, \dots, n)$$

で与えられる。ただし提唱される価格  $p_j(t+1)$  が負であることは市場を混乱させるであろうから、むしろゼロの価格が提唱されるであろう。すなわち  $p_j(t+1)$  とゼロを比較して大きい方をとる演算  $\max[p_j(t+1), 0]$  が採用され、競売人は改訂された方程式

$$(6) \quad p_j(t+1) = \max[p_j(t) + v \{\sum p_k(t)\} E_j(t), 0] \quad (j=1, \dots, n)$$

にしたがって模索を続けることになる。

さらに価格の‘正規化’の問題がある。価格は商品間の交換比であり、裁定取引が完全に働いている場合、価格を諸商品の価値基準財に対する交換比とみなすことができる。問題は事前に価値基準財をどう決定するかであるが、一つの方法として‘総ての商品を1単位ずつ集めて作られる合成財’を考え、それを価値基準財とみなす。（合成財を構成する少なくとも一つの商品は‘非’自由財であるから、合成財を非自由財とすることに問題ない。合成財1単位の価格は構成要素の価格の和  $\sum p_k(t)$  に等しく、第  $j$  財の一単位は合成財の  $p_j(t) / \sum p_k(t)$  単位と交換される。この交換比

$$(7) \quad q_j(t) = p_j(t) / \sum p_k(t)$$

は、基準財で測った  $t$  期における  $j$  財の価格を与え、また

$$(8) \quad q_j(t+1) = p_j(t+1) / \sum p_k(t+1)$$

は、 $(t+1)$  期での対応する価格をあたえている。(6) (8) および (7) 式を考慮すれば

$$(9) \quad q_j(t+1) = \frac{\max[q_j(t) + v E_j(t), 0]}{\sum \max[q_k(t) + v E_k(t), 0]} \quad (j=1, \dots, n)$$

がえられる。上式は、 $t+1$  期の正規価格を決定するものであるが、 $E_j(t)$  は個人の超過需要の総和であり、各個人が予算制約式 (1) に従って  $u_i(x_i)$  を最大化することによりえられたもので、(1) を  $\sum p_k$  で割っても最大値は不変である。すなわち (1) 式を正規化された予算方程式  $\sum q_j x_{ji} = \sum q_j \bar{x}_{ji}$  で置き換えることができ、従って超過需要は、相対価格の関数

$$(10) E_j(t) = E_j[q_1(t), \dots, q_n(t)]$$

となる。

ところで  $q(t)$  を  $q(t+1)$  に変換する調整方程式 (9) は二つの条件 ① 価格適正化条件:  $q_j(t+1)$  の和は常に 1 に等しい ② 非負条件: 超過供給がいかに大きくとも価格はゼロ以下には下らない を満たしている。また超過需要関数の定義から

$$(11) \sum q_j E_j(q) = 0$$

がえられる。(上式は総ての  $q$  について成立し“ワルラス法則”とよばれる) ( $q(t) \neq q(t+1)$  は  $t$  期から  $t+1$  期にかけての価格変動を意味するが)  $q(t) = q(t+1)$  なる点は‘不動点’とよばれるが、ブラウアおよび角谷の定理は、‘超過需要関数が総て連続ならば少なくとも一つの不動点が存在する’ことを証明している。 $q$  を不動点とすれば、(9) 式から

$$(12) \frac{\max [q_j + vE_j(q), 0]}{c} \quad (c = \sum \max [q_k + vE_k(q), 0])$$

がえられる。 $c$  は正であるから、(12) 式から ①  $q_j > 0$  ならば  $q_j + vE_j(q) > 0$  従って  $E_j(q) = (c-1)q_j/v$  が導かれ ②  $q_j = 0$  ならば  $E_j(q) \leq 0$  である。こうして

$$E_j(q) \begin{cases} = (c-1)q_j/v & q_j > 0 \text{ に対して} \\ \leq 0 & q_j = 0 \text{ に対して} \end{cases}$$

となるが、超過需要関数は、 $c=1$  でない限りワルラス法則を満たさないから

$$E_j(q) \begin{cases} = 0 & q_j > 0 \text{ に対し} \\ \leq 0 & q_j = 0 \text{ に対し} \end{cases}$$

となる。すなわち‘価格が変動しない’不動点では、① ‘正の価格をもつ’希少財においては超過需要も超過供給も存在しない ② ‘価格がゼロである’自

由財については超過需要の可能性はないが、超過供給は存在しうるが指摘され、模索過程の不動点は、非自由財の需要と供給を均等化する均衡価格を与える（かくして交換均衡の存在は達成される）

(3) 次に均衡価格の安定性問題がある。

ワルラスは安定の概念について、工学者 クールノーの仕事から多くのものをえており、次の様に書いている。

「だからこの“安定”均衡を、われわれは、垂直線上にある重心の上方に懸吊点を有する物体が、垂直線上から離れるとき、重力によって自ら均衡点に落ち着くところの均衡に比べることができる。この均衡は‘安定均衡’である」また「この“不安定均衡”は支点が垂線上の重心より下にある物体の均衡に比す可きもので、もし重心が垂線を離れるとますますこれを遠ざかり、これを支点の下に置くのでなければ自ら重力によって復帰しない」とも書いている。（クールノーのおかげで彼は初めから均衡からの乖離がやがて均衡を回復する動きを生み出すかどうかを議論の対照となしえたのである）ついでワルラスは‘多数財経済’における均衡の安定性を論じている。（単一市場の安定条件を任意の多数市場のそれに一般化する最初の試みはヒックスの業績であるとする議論があるが、それは誤りである）ワルラスは価格の動学的変化に関心があつた。 $p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$  が均衡価格ではないとすると

$$(13) \quad E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] \neq 0$$

であり、このとき  $p_1(t)$  は第一商品市場での‘部分均衡’を達成する価格  $p_1(t+1)$  に変化し

$$(14) \quad E_1[p_1(t+1), p_2(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] = 0$$

である。第一財の価格変化の他財への‘波及’について、ワルラスは市場を‘一定順序’に配列し、波及効果が次のように進むと仮定する。

まず第一財の価格変化は第二財の市場の均衡を乱す。第二財市場では、第一財の価格  $p_1(t+1)$  および残りの  $p_3(t), \dots, p_{n-1}(t)$  を所与として、需給が一致するように第二財の価格が調整されて  $p_2(t+1)$  が決まり

$$E_2[p_1(t+1), p_2(t+1), p_3(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] = 0$$

これらの調整が総てなされた後、 $p_2(t), \dots, p_{n-1}(t)$  はそれぞれ  $p_2(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1)$  に変化するが、その結果 (14) 式は成立せず

$$(15) \quad E_1[p_1(t+1), p_2(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1), 1] \neq 0$$

( $t+1$ ) 期の不等式 (15) は

$$(16) \quad |E_1[p_1(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1), 1]| < |E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1]|$$

が満たされるなら、不等式 (13) に比べて一層等号に近くなる。ワルラスは次のように説明する。

「不等式 (13) を等式たらしめる  $p_1(t)$  から  $p_1(t+1)$  への変化は、(少なくとも) 第一財の需要については等式の方へ直接的影響を生じ、他方 (その結果としての)  $p_2(t), p_3(t), \dots, p_2(t+1), p_3(t+1), \dots$  への変化が間接的影響を生じて、第一財の需要についてはあるものは等式の方へ、あるものは反対方向をとるというように、ある点まで相殺する影響をもつことを考えれば、上の不等式が当初の不等式より均等に近いことは確かであろう。従って新しい価格  $[p_1(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1)]$  の体系は、旧価格  $[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)]$  の体系より均衡に近いのであり、同じ方法を連続すれば、ますますこれに近付くのである」と。

いまある商品の超過需要が正 (負) であれば、その商品の市場の部分均衡は価格を引き上げる (引き下げる) ことにより達成されると仮定する。従って  $E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] \leq 0$  に従い、 $p_1(t+1) \leq p_1(t)$  となるであろう。他方 (16) 式によると

$$E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] \leq 0 \quad \text{に従い}$$

$$E_1[p_1(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1), 1] - E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1] \leq 0$$

となる。従ってワルラスの安定条件は

$$(17) \quad \frac{E_1[p_1(t+1), \dots, p_{n-1}(t+1), 1] - E_1[p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), 1]}{p_1(t+1) - p_1(t)} < 0$$

を意味する。すなわち第一財の価格変化は、総ての価格が調整された後、その超過需要を反対方向に変化させる。

(ワルラスのこの安定条件はヒックスの安定条件と非常に似た形となるが、ワ

ルラスが安定条件 (16) で超過需要  $E_1(t)$  の絶対値を後に見るリアプーノフ関数として扱っているのは興味ある点であると森島はいつているし、重要なことであろう。)

(4) ここで (9) 式で安式化された模索過程にかえろう。

過程の出発点  $t=0$  で競売人は初期価格  $q(0)$  を提唱する。初期価格が満たすべき条件は ①非負である ②和が1である だけでそれ以外は任意である。公式 (9) は、 $q(0)$  を基に  $q(1)$  を与え、 $q(1)$  を基に  $q(2)$  を与える等である。無限点列  $\{q(t)\}$  ( $t=1, 2, \dots$ ) の各項はこのように定まり、また上記の2条件を満たしている。(総ての  $t$  について  $q_i(t)$  は非負であり、 $\sum q_i(t)$  は1に等しい。これは各  $q(t)$  が有界であることを意味し、従ってボルツァーノワイエルシュトラスの定理 (有界無限集合は集積点をもつ) により、 $\{q(t)\}$  は少なくとも一つの極限点  $q^0$  をもつ。ついで  $q^0$  から出発する新しい点列  $\{q^1\}$  で、 $f_i(q)$  が (9) 式の右辺、 $f(q)$  が  $[f_1(q), \dots, f_n(q)]$  を表す' ものと考えれば、 $q^1=f(q^0)$ ,  $q^2=f(q^1), \dots$  によって点列が定まる。

' $\{q(t_i)\}$  を  $\{q(t)\}$  の部分点列で  $i$  が無限大に近付くにつれ、 $q^0$  に収束する' という条件の下で、上の  $\{q^1\}$  がやがて  $q^0$  に戻ってくることを証明できる (証明略)。こうして

$$(18) \quad q^1=f(q^0), \quad q^2=f(q^1), \dots, \quad q^0=f(q^{r-1})$$

をうる。ここで  $q^t \neq q^0$ ,  $t=1, 2, \dots, r-1$  である。もし  $r=1$  ならば  $q^0=f(q^0)$  となり、 $q^0$  は均衡価格であり、模索過程の価格経路  $q(t)$  は  $q^0$  に収束する。他方  $r>1$  ならば、それは周期軌道  $q^0 q^1 \dots q^{r-1} q^0$  に収束し、決して均衡価格に近づかない。

このように安定性の必要十分条件は  $r$  が1に等しいことである。

### 〔ⅢⅧ〕 リャプノフの安定性理論

(a) 数理解説：歴史的にいつて微分方程式の研究課題の展開には、二つの明白に異なった流れがある。一つは具体的に解の形を求める努力であり、その中には解析的に表された解または厳密解を求めることおよび近似的にしても解の



形を明確に求める努力が含まれる。いま一つは厳密解とか近似解を得るあらゆる努力を放棄して、解の総ての‘族’に関する情報を得るための努力である。前者はニュートン以来の方向であり、後者はポアンカレにより1880年頃にはじめられた‘定性的理論’である。

定性的理論における大きな問題は、‘与えられた一つの解に対し、その近くの解との関係はなにか’である。解はある空間における曲線または‘軌道’ $C$ であるが、このとき ①  $C$ の近くから出る諸軌道 $D$ は $C$ の近くに留まっている（このとき $C$ は‘安定’）か、または $C$ を離れてゆくか（このとき $C$ は‘不安定’）を調べる。これは明らかに定性理論内の‘安定性’の問題で、安定性理論の真の創始者はLiapunovであるといっても過言ではない。(Problém de la stabilité de mouvement 1892 山本稔 訳)

彼は二つの方法であつかつており、第一は具体的な解が知られていることを前提としており、第二の方法は解そのものの知識を必要としない普遍的なものである。

(1) ところで安定性は、ある方程式系の一性質であることを考え、その一つとして $n$ 元の方程式系

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \hline \dot{x}_n = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array}$$

から出発する。上式は

$$(F) \quad \dot{x} = X(x, t)$$

で表せる。 $t$ は普通時間と考えられるが、それに限定する必要はなく $x$ の一つとして

$$(FA) \quad \dot{x} = X(x)$$

と簡単化される。この性質をもつ方程式系は‘自律系’として知られる。

(2) 数学者たちは長い間 (F) のような方程式系の解の存在に関心を示さなかったが、前世紀の始めコーシーが適当な解の存在を証明した。

“存在定理”：座標 $x_1, \dots, x_n, t$ をもつ空間 $E_{x, t}$ の領域を $\Omega$ とし、 $\Omega$ の各点で連続な偏導関数 $\partial x_h / \partial x_k$ が存在するとする。 $(x^0, t_0)$ を $\Omega$ の一点とする。

このとき  $x(t_0) = x^0$  をみたす方程式系 (F) の一意的な解  $x(t)$  が存在し、それは  $\Omega$  の境界まで延長可能である。 $(x^0, t_0)$  を  $\Omega$  のなかを動く点とみなすときこの解は  $(x^0, t_0)$  の連続関数である。

① 解  $x(t)$  は  $x_1, \dots, x_n$  をパラメーター  $t$  の関数として定め

$$(1) \quad x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$$

と書くことにする。これは  $E^{n+1}$  において最初の  $n$  個の座標が最後の座標  $t$  の関数であることを表し、たとえば  $x_1 = f_1(t)$  となる。 $t$  の代わりに  $x$ ,  $x$  の代わりに  $y$  と書けば、上式は  $(x, y)$  平面での曲線を表す周知の式  $y = f(x)$  になる。同様に方程式系 (1) は空間  $E^{n+1}$  の一つの曲線を表しており、それらは方程式系 (F) の‘積分曲線’と呼ばれる。しかし方程式 (1) は変数  $x$  だけの空間における曲線を定義するしていると考えてもよく、このときこの曲線は‘軌道’ or ‘運動’と呼ばれ、空間は‘相空間’と呼ばれる。

② 自律系 (FA) は  $dt$  を消去して

$$(2) \quad dx_1 / X_1(x) = \dots = dx_n / X_n(x)$$

とも表され ( $t$  の媒介をうけないこと) さらに進めて

$$(3) \quad dx_1 / dx_n = X_1 / X_n, \dots, dx_{n-1} / dx_n$$

と書ける。これは (F) と類似の方程式系であるが、 $t$  が  $x_n$  で置き換えられている。(便宜上‘軌道’のことを‘経路’とよぶことにすれば) 適当な‘存在領域’  $\Omega$  の任意の点を通る軌道はただ一つに限るわけである。(変数  $t$  は単なる媒介変数に過ぎず、 $t$  を  $t+c$  に置き換え定数だけ変化させても経路は変わらない)

③ 安定性の論議において、総ての  $t \geq 0$  に対して  $X(a, t) = 0$  という‘特殊な’性質をもつ方程式系 (F) をつねに考えることとする。従って  $x=a$  は解になっている。

これは空間  $E^{n+1}$  における一つの半直線であり、( $x$  の) 空間  $E^n$  における一点  $x=a$  である。このような点は‘臨界点’ or ‘平衡点’と呼ばれる。 $x-a$  を  $x'$  で書き換え、再び  $x'$  を  $x$  で置き換えると方程式は (F) の型のままであるが、 $t \geq 0$  に対して  $X(0, t) = 0$  が成立することになる。‘平衡点が原点になる’わけ

である。(これは一般的仮定として用いられる)

(3) 定数係数の線形微分方程式：展開された形の方程式系

$$(4) \dot{x} = a_{11}x_1 + \dots + a_{in}x_i \quad i=1, 2, \dots, n \text{ (係数は定数)}$$

を考える。これは行列記号を用いて

$$(5) \dot{X} = AX, \quad A = (a_{ij})$$

と簡単化でき、次の点が指摘される。

①  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を  $A$  の固有値すなわち  $f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$  の根とする。方程式 (5) の各解は  $g_i(t)\exp(\lambda_i t)$  という形の項の‘高々  $n$  個の和’を成分としてもっている。(ここで  $g_i$  は次数  $< n$  の多項式である)。

②  $n$  個の一次独立な解が存在する：すなわち‘総て零とはならない’定数  $c_i$  に対して、関係

$$c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)} = 0$$

は成立することがないような  $n$  個のベクトル解が存在する。

③  $x_{1j}, \dots, x_{nj}$  を  $x^{(j)}$  の成分とし、 $X$  をこれらの成分を‘第  $j$  行’とする行列とする。行列  $X(t)$  は任意の  $t$  に対して正則である。(すなわち  $t$  がなんであっても  $|X(t)| \neq 0$  であり、 $X(t)$  はつねに逆行列をもつ)

④  $X$  は行列方程式

$$(6) \dot{X} = AX$$

をみたす。

⑤  $X$  が (6) の任意の解であれば、任意の定数行列  $C$  に対して  $XC$  も (6) の解である。

⑥ ある特定の解  $X^0(t) = X(t) \cdot X^{-1}(0)$  は  $X^0(0) = E$  という性質をもつただ一つの解であり、しばしば  $e^{At}$  と表される。この解は‘基本行列解’と呼ばれ、 $X^0(t) \cdot c$  をみたす (5) の解である。

(4) ‘随伴方程式系’：(4) とともにその随伴方程式系

$$(4') \dot{Y} = -(a_{11}y_1 + \dots + a_{ni}y_n) \quad \text{or} \quad (5') \dot{Y} = -YA$$

を考える。

(4') の取扱いは、列と行が入れ代わり右行列積が左行列積に置き換わってい

る点を除けば、(4) と全く同じであり、前記の性質の総てが成立する。行列方程式は

$$(6') \quad \dot{Y} = -YA$$

であり、固有値は

$$| -A - \lambda E | = (-1)^n | A + \lambda E | = (-1)^n f(-\lambda)$$

の根であるから、それらは  $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$  となる。従って

各解は  $g_j(t) \exp(-\lambda_j t)$  という項の高々  $n$  個の和をその成分としてもっている。(ここで  $g_j(t)$  は次数  $< n$  の多項式である。)

$X$  を (6) の基本解だとすれば、 $X^{-1}$  が (6') の基本解となることが示され、 $X^{-1}(t) = e^{-At}$  は (6') の基本解である。

#### (b) 安定性に関する一般的考察

① ある種の装置がある一般的な条件の下で作動しているとする。これらの諸条件を少し変えてみる。この変化は装置に殆ど影響を与えないだろうか。それともかなりの影響を与えるだろうか。第一の場合は‘安定’であり、第二の場合は‘不安定’であると考ええる。

このことはどのような物理的なシステムに当て嵌まるだろうか。

このシステムはある個数の物理的パラメータ  $x_1, \dots, x_n$  (総ての位置と速度) に関係しているが、これをある空間  $E_n$  の点 or ベクトル  $x$  で表すこととする。時刻  $t$  におけるシステムの状態を  $x(t)$  とすれば、点  $x(t)$  は空間  $E_n$  において軌道  $g$  を形成する。ここで  $g$  の近くから出発する全軌道  $g^\circ$  は  $g$  に対しどのような行動をとるだろうかを問題とする。(これらの軌道は時間がたつにつれ  $g$  の十分近くに留まるだろうか。すなわち ‘安定’ だろうか、それとも  $g$  から離れて ‘不安定’ になるだろうか)

(a) 軌道  $g$  とその近傍の軌道が (F) の型の方程式  $\dot{x} = X(x, t)$  の解になっていると仮定する。

このとき  $f(t)$  を安定性が問題になっている基本的状態  $g$  に対応する特別の解とし (下図参照) 変数変換

$$y = x - f(t) \quad x = y + f(t)$$

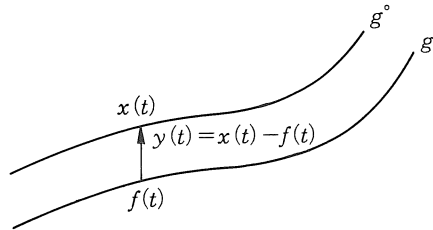
を行う。これを (F) に代入すると

$$y + f'(t) = X(y + f(t), t)$$

となり、同じ一般形をした方程式

$$(F) \quad \dot{Y} = Y(y, t) \quad Y(0, t) = 0$$

がえられる。ここで  $g$  が特別解  $y=0$  になっており、扱うのは原点の安定性であるという点が前との違いである。



最も实际的で頻繁に現れるのは自律形

$$(FA) \quad \dot{X} = X(x)$$

である。そしてここではパラメター  $x_1, \dots, x_n$  は一定の値  $a_1, \dots, a_n$  に達している。すなわち点  $x=a$  は一つの解になっているとする:  $X(a) = 0$

もし最初にシステムが平衡状態  $a$  にあるならば、それはずっと同じ状態に留まるが、これは‘数学的な記述’である。現実にはシステムは攝動を受けやすく、また初期の状態を正確に制御するのは不可能である。ここから安定性問題がおこる。すなわちわずかな攝動の下でシステムは平衡状態の近くに留まるであらうか。それとも留まらないか。これが以下で議論する問題である。

(c) はじめに自律系と平衡状態  $x=a$  の安定性を扱うこととする。

便宜上問題になっている平衡点を原点にとっておく（このことは簡単な座標交換  $x^0 = x - a$  を行いさえすればよく）変換後  $x^0$  を再び  $x$  でおきかえると、扱うべき基礎方程式系は

$$(FA) \quad \dot{X} = X(x), \quad X(0) = 0$$

となり、議論すべきことは原点の安定性となる。

ここでいくつかの簡単な仮定をおく。一般に ①  $S(R)$  により‘球状領域’  $\|x\| < R$  を ②  $H(R)$  によって‘球面’  $\|x\| = R$  自身を ③  $S_r^R$  で‘閉円環状領域’  $r \leq \|x\| \leq R$  を表すこととする。

ある‘開’球状領域  $\Omega: \|x\| < A$  すなわち  $S(A)$  において (FA) に対する基礎存在定理が成立すると仮定する。そして特に  $\Omega$  において偏導関数  $\delta X_i /$

$\delta x_i$  がすべて存在し連続であるとする。 $\Omega$  の各点  $x$  を方程式系 (FA) の唯一の軌道  $g$  が通過することを思い起こそう。 $t \geq 0$  のとき  $x(t)$  によって表される  $g$  の一部分を  $g^+$ ,  $t \leq 0$  のとき  $x(t)$  によって表される  $g$  の一部分を  $g^-$  で表すことにする。

原点は次のように呼ばれる。

- ① 任意の  $R < A$  に対してある  $r \leq R$  が存在して、球状領域  $S(r)$  の点  $x^0$  から出発する一つの経路  $g^+$  が以後ずっと球状領域  $S(R)$  に留まっているなら ‘安定’ であると呼ばれる (すなわち  $S(r)$  から出発する一つの経路が  $S(R)$  の境界球面  $H(R)$  に決して到達しないならば安定である)
- ② 安定であり、かつある  $S(R_0)$ ,  $R_0 > 0$  の内部から出発する各経路が時間の無限の増加とともに原点へ近付くならば ‘漸近安定’ であるといわれる。
- ③ ある  $R$  に対してどんなに小さく  $r$  をとっても球状領域  $S(r)$  のなかにつねに一点が存在して、 $x$  を通る一つの経路  $g^+$  は境界球面  $H(R)$  に到達してしまうとき、‘不安定性’ をもつという。

例 1 : 二次元の方程式系  $\dot{X}=y, \dot{Y}=x$  を考えれば  $xx+yy=0$  であるから総ての軌道は  $x^2+y^2=R^2$  すなわち原点を中心とする同心円である。さらに原点はただ一つの臨界点である。 $r=R$  ととれば、 $S(r)$  の点を通る円は  $S(R)$  の内部にとどまる。従ってこの円は  $S(R)$  の中に留まることになり、原点は安定であることがわかる。しかし総ての経路は原点に近づかないから原点は漸近安定ではない。

例 2 :  $\dot{X}x=-x, \dot{Y}=-y$  の解は  $x=Ae^{-t}, y=Be^{-t}$  である。総ての経路は  $y/x=B/A=k$  : 原点を通る半直線である。再び  $r=R$  ととる。 $S(R)$  の点  $x$  から出る任意の経路は  $S(R)$  の内部にありかつ原点に近付く。従って漸近安定性が得られる。実際には ‘大域的’ に漸近安定である (すなわちどんな解も原点に近付く)。

例 3 :  $x=x, y=y$  の解は  $x=Ae^t, y=Be^t$  である。総ての経路はやはり  $y/x=k$  : 原点を通る半直線であるが、その向きは反対である : 任意の  $R$  に対してどんなに小さく  $r$  をとっても  $S(r)$  の任意の点から出る経路は球面  $H(R)$  に達す

る。従って原点は不安定である。

リヤプノフの諸定理は上述のいろいろな性質を、これから扱うある種の関数の性質に帰着させるものである。

(d) 特殊な型の関数

次のような性質をもつ‘正定値’と呼ばれるスカラー関数  $V(x)$  が重要な役割をする。

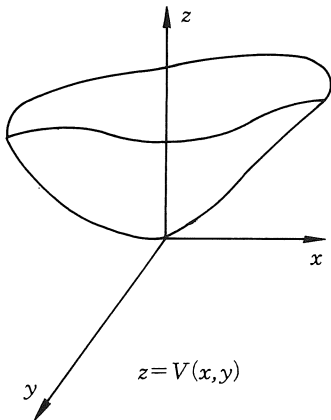
- ①  $V(x)$  はその一次偏導関数とともに原点を含むある開領域  $\Omega$  で連続である。
- ②  $V(0)=0$
- ③ 原点の外側（しかしつねに  $\Omega$  のなか）で  $V(x)$  は正。すなわち  $V$  は非負であり、原点だけで零になる（原点は  $V$  の孤立最小点である）。

$V$  は一次偏導関数をもつから、勾配： $\text{grad } V$  をもつ。そして (FA) の経路  $g$  に沿って

$$\dot{V} = X \text{grad } V$$

であることを思い起こそう。さらに  $\Omega$  において  $\dot{V} \leq 0$  ならば、 $V$  は‘リヤプノフ関数’と呼ばれる。

関数  $V(x)$  の幾何学的意味は次のごとくである。



新しい座標  $z=V(x)$  を導入し、 $(x_1, \dots, x_n, z)$  or  $(x, z)$  空間の中でこの軌跡の性質を考える。簡単のため  $n=2$ , 座標  $x, y$  とする。問題は  $V$  が正定値の場合、原点の近傍で

$$z = V(x, y)$$

の画面がどのようなになっているかである。小さい  $x, y$  に対しては  $V \geq 0$  であり、 $x=y=0$  だけで  $V=0$  であるから局面は一般に上向きの‘放物面鏡’ or テーブル

上のカップの形をしている。 $V$  が負定値ならカップは下向きになっている。 $(n$  次元の場合は  $n$  次元カップ) も一つの表現がある。 $n=2$  とし  $x, y$  は通常の直

積座標とする。等高線群  $V(x, y) = k$  は原点を囲む卵形の曲線の集合である。これらの曲線はカップを水平面で切った切口を  $x, y$  平面 ( $z=0$  の平面) に投影したものと考えられる。

特殊なりヤプノフ関数：原

点の近傍で  $V$  が  $x_i$  に関するべき級数で表されているとする。このとき

$$V = V_p(x) + V_{p+1}(x) + \cdots + \cdots$$

と表される (ここで  $V_i(x)$  は  $x_1, \dots, x_n$  に関する  $k$  次同次多項式 or 同次形式である。

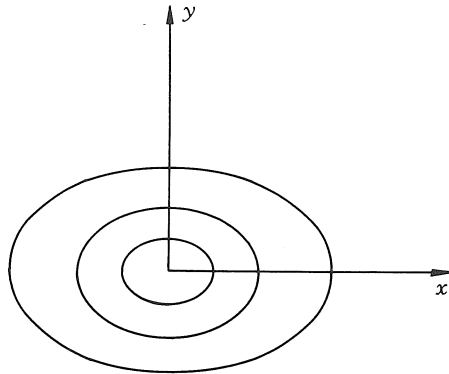
同次形式  $V_p(x)$  は単に級数

$V_k(x)$  の最低次の項の集まりである。小さい  $x$  に対し  $V_{p+1}, V_{p+2} \dots$  は  $V_p$  により完全に支配されているから、原点の適当な近傍  $\Omega$  において  $V$  の符号は  $V_p$  の符号と同じである。ここで

- ① もし  $p$  が ‘奇数’ ならば、 $V$  はリヤプノフ関数には ‘なりえない’。最低次数の項は偶数次でなければならない。
- ② しかし上のことは必要条件ではあるが、十分条件ではない。たとえば  $V_p = V_2 = x_2^2 - x_1^2$  は、 $x_1 = 0$  のとき  $V_p \geq 0$  であり、 $x_2 = 0$  のとき  $V_p \leq 0$  であるから正定値でも負定値でもない。
- ③ 最も簡単な正定値関数は二次形式である： $V(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )  
 $V(x)$  が正定値であるための必要十分条件は：対象行列式  $|a| = |a_{ij}|$  の引き続き ‘主小行列式’ の総てが正であることである。

(d) リヤプノフの安定性定理

物理系の平衡状態の近くで系のエネルギーがつねに減少しているなら平衡点は安定的であるということは直感的に明らかである。リヤプノフの諸定理はこのアイデアの一般化である。リヤプノフの方法の中心にある考え方は ‘リヤプノフ関数の性質によって方程式系 (FA) の解の安定性を見付けるところにあ





る。しかも解に関する情報を直接的には使わないで (FA) から間接的に解の安定性を見付けるところにある。

定理Ⅰ 安定性定理：原点のある近傍  $\Omega$  においてリヤプノフ関数  $V(x)$  が存在するならば、原点は安定である。(以下証明略)

定理Ⅱ 漸近安定性定理：もし  $-\dot{V}$  もまた  $\Omega$  において正定値であるならば、安定性は漸近的である。

定理Ⅲ 第一不安定性定理：  $\Omega$  において  $V$  は連続な一次偏導関数をもち  $V(x)=0$  とする。  $\dot{V}$  は正定値であり、  $V$  は原点の任意の近傍で正の値をとるとする。このとき原点は不安定である。

定理Ⅳ 第二不安定性定理：  $V$  に対して定理Ⅲと同じ仮定をおき、もし

$$\dot{V} = \lambda V + V^\circ$$

$V^\circ(x)$  は  $\Omega$  で非負で  $\lambda > 0$  ならば、原点は不安定である。

チェターエフは領域を小さくして次の定理を与えている。

定理Ⅴ チェターエフの不安定性定理：  $\Omega$  を原点の一つの近傍とする。関数  $V(x)$  と  $\Omega$  の真部分領域  $\Omega_1$  が存在して次の性質をみたすとする：①  $\Omega_1$  のなかで  $V(x)$  は連続な一次偏導関数をもつ ②  $\Omega_1$  のなかで  $V(x)$  と  $\dot{V}(x)$  は正 ③  $\Omega$  の内部にある  $\Omega_1$  の境界点で  $V(x)=0$  ④ 原点は  $\Omega_1$  の一つの境界点である。これらの条件の下では原点は不安定である。(非自律系においても安定性、漸近安定性さらに不安定性の定義は変更しなくてよい。)

例Ⅰ：二次元方程式  $\dot{x} = -\lambda x + \dots$ ,  $\dot{y} = -\mu y + \dots$  (...は少なくとも二次の項からはじまる収束するべき級数を表す)  $V = x^2 + y^2$  を選べば、 $\dot{V} = -2(\lambda x^2 + \mu y^2) + \dots$  となる。 $x, y$  が十分小さいとき  $\dot{V}$  の符号は上の  $\lambda x^2 + \mu y^2$  に支配されるから、原点を除き  $\dot{V} < 0$  である。 $V$  は正定値であり、 $\dot{V} < 0$  である。定理Ⅱの条件が満たされているから漸近安定性をうる(安定結節点)

(e) 漸近安定性の範囲：システムは漸近安定であるとしても、たとえば1ミリボルトのズレがあっても正常に作動しないかも知れない。理論上は安定であるとしても実際上は確かに不安定である。真の漸近安定を得るには若干のズレが許されねばならない。そこで‘漸近安定性の範囲’が問題となる。ここで予

備的概念として二つのことが必要である。

通常の自律系 (FA)  $\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$  において

‘極限集合’：直感的には  $x(t)$  が (FA) の一つの解であるとき、その  $\Gamma^+$  とは曲線  $x(t)$  が無限時間かかって到達する集合である。従つてもし  $x(t)$  が ‘極限周期軌道’  $\delta$  に巻き付くなら  $\delta$  はその正の極限集合である。(より正確には、 $n$  とともに  $t_n \rightarrow \infty$  となる時間の増加列が存在して  $n \rightarrow \infty$  のとき  $x(t_n) \rightarrow p$  となるならば、 $p$  は  $\Gamma^+$  に属するという。 $x(t)$  が有界ならば  $t \rightarrow \infty$  にしたがって  $x(t)$  はその正の極限集合  $\Gamma^+$  に近づく (すなわち任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $N(\epsilon)$  を  $\Gamma^+$  の  $\epsilon$ -近傍とすると、ある時刻  $T$  が存在して  $t > T$  に対しては  $x(t)$  は  $N(\epsilon)$  に入ってしまう。

$t$  を  $-t$  でおきかえることにより同様に定義される。

‘不変集合’：不変集合  $G$  は、 $x_0$  を  $G$  の点とするときそのすべての経路が  $G$  の中に入っているという性質により特徴付けられる。従つて閉じた経路は不変集合である；弧の総ての点からなる経路の集まりは不変集合である。

とくに注意すべきは ①  $x(t)$  が  $t \geq 0$  に対して有界ならば、その正の極限集合  $\Gamma^+$  は空でないコンパクトな不変集合である ② もし  $x(t)$  が  $t \geq 0$  に対して有界であり、集合  $M$  が  $\Gamma^+$  を含むならば  $x(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $M$  に近づくことである。これを前提に漸近安定の範囲を決定するための次の定理が成立する。  
定理Ⅵ：  $V(x)$  を連続な一次偏導関数をもつスカラー関数とし、 $\Omega_1$  は領域  $V(x) < 1$  の一つの成分を表すことにする。 $\Omega_1$  は有界で  $\Omega_1$  の中では  $\dot{V}(x) \leq 0$  (a) と仮定する。 $R$  を  $\dot{V}(x) = 0$  をみたす  $\Omega_1$  の点の総てからなる集合とし、 $M$  を  $R$  の中の最大の不変集合とする。このとき  $\Omega_1$  の中にある各解は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $M$  に近づく。(集合  $M$  が一点  $P$  になるとき、 $\Omega_1$  の中から出発する総ての解は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $M$  に近づく。その点  $P$  はアトラクターである)

定理Ⅶ：もし原点が  $\Omega_1$  の中に存在し、定理 (a) を

条件 ‘ $\Omega_1$  の中で  $x \neq 0$  なる総ての  $x$  に対し  $\dot{V}(x) < 0$ ’ (a<sup>0</sup>)

で置き換えるならば、原点は漸近安定である、とくに  $\Omega_1$  の中の各解は  $t \rightarrow +\infty$  のとき原点に近づく。

全空間が漸近安定性の領域に入っているとき‘完全安定性’をもつといい、次の定理が成立する。

定理Ⅷ：  $V(x)$  は総ての  $x$  に対して連続な一次偏導関数をもつスカラー関数とする。  $x \neq 0$  なる総ての  $x$  に対して  $V(x) > 0$ ，かつ  $\dot{V}(x) \leq 0$  と仮定する。  $E$  を  $\dot{V}=0$  の軌跡とし，  $M$  は  $E$  に含まれる最大の不変集合とする。このとき  $t > 0$  に対して有界な総ての解は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $M$  に近づく。

もしその上に  $\|x\| \rightarrow \infty$  のとき  $V(x) \rightarrow \infty$  であることがわかっておれば、各解は  $t \geq 0$  に対して  $M$  に近づくといえる。  $M$  が原点であるなら完全安定性をうる。  $x(t)$  を  $x^0$  を通る解とすると、十分大きなある  $r$  が存在して、  $\|x\| \geq r$  なる総ての  $x$  に対して  $V(x) > V(x^0)$  となる。  $V(x(t))$  は  $t$  とともに減少するから、すべての  $t \geq 0$  に対して  $\|x(t)\| < r$  であることがわかり、次の定理が成立する。

定理Ⅸ：  $V(x)$  は総ての  $x$  に対して連続な一次偏導関数をもつスカラー関数とする。

①  $x \neq 0$  に対して  $V(x) > 0$  ②  $x \neq 0$  に対し  $\dot{V}(x) < 0$ ，かつ ③  $\|x\| \rightarrow \infty$  と仮定する。このとき方程式系 (FA) は完全安定である。(数多くの応用においては実際にこの定理をみたすりヤプノフ関数  $V$  を構成することができる)

## (2) 制御への応用

サーボ機構とか現代の生産分野におけるあらゆる種類の制御問題は極めて重要である。そのような機構の安定性理論は Lur'ye を創始者としてソ連において展開されてきた。

固有値が総て負の実数部分をもつような実正方行列を‘安定’ (Hurwitzian とよばれる) と呼ぼう。これは系  $\dot{x} = Ax$  は、  $A$  が上述の意味で安定なときかつそのときに限り漸近安定であるという事実を示唆しているのである。

機構  $S$  の状態は有限個のパラメータ  $u_1, u_2, \dots, u_n$  すなわち  $n$ -ベクトル  $u$  に依存するとする。その系  $S$  の状態はベクトル記号で

$$(1) \quad \dot{u} = U(u)$$

と書けるいくつかの微分方程式の集まりにより支配されているとする。

$u=u^0$  は (1) の系の平衡点 (臨界点) あるいは一点からなる解である。

(a) 系  $S$  がその位置  $u=u^0$  のできるだけ近くに位置を保つことが望ましいとする。(すなわち  $u^0$  が平衡位置であることが望まれる)

変数ベクトル  $y=u-u^0$  を導入すれば、(1) は

$$(2) \quad \dot{Y}=Y(y)=U(u^0+y)$$

で置き換えられる (ここで  $Y(0)=0$  である)。 $y=(y_1, \dots, y_n)$  とすれば臨界点は  $y=0$  になる。そして  $y$  は実際の目的のため十分に小さいとすれば、(2) は線形近似

$$(3) \quad \dot{y}=Ay \quad (A \text{ は定数行列で } |A| \neq 0)$$

に置き換えられる。

原点の安定性維持のため補正機構 (制御) を利用する。 $\xi$  は制御がない場合に  $\xi=0$  が対応するようなスカラーパラメーターとする。新しい運動方程式は

$$(4) \quad \dot{y}=Ay+\xi b, \quad \xi=f(\sigma), \quad \sigma=c'y-r \cdot \xi$$

となる。 $(b, c \text{ は } n\text{-ベクトル, } r \text{ はスカラー})$   $\sigma$  (シグナル) は中間段階として導入され、スカラー関数  $f(\sigma)$  はサーボモーターの特性項であり、 $\sigma f(\sigma) > 0, \sigma \neq 0, f(0)=0$  の性質をもつ。 $f(\sigma)$  の形は一般に下記のタイプのひとつであろうが、ここでは連続で、積分が発散するとする。



$y, \xi$  の代わりに  $x, \sigma$  を使い

$$(5) \quad \dot{x}=Ax+\sigma b, \quad \sigma=c'x-r \cdot \sigma$$

で定義する。 $y, \xi \rightarrow 0$  ならば  $x, \sigma \rightarrow 0$  に止まることは明らかであるが、われわれはその逆を期待する。

(b) 要求条件は (5) が ‘一意的な’ 逆をもつこと、すなわち (5) から  $y, \xi$  を  $x, \sigma$  に関して一意に解くことができることである。これは  $n+1$  個の未知数に関する一次の  $n+1$  個の方程式の系であって、この系は非特異係数行列 (すな

わち行列  $\begin{bmatrix} A & b \\ c' & -r \end{bmatrix}$  が 0 でない行列式) をもたねばならない。A は非特異であるから  $A^{-1}$  もそうであり、行列  $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  も同様である。従ってそれはその行列式が 0 でないような (二つの非特異な行列の積)  $\begin{bmatrix} E & A^{-1}b \\ c' & -r \end{bmatrix}$  として整理される。この行列式を計算して

$$(6) \quad r + c'A^{-1}b \neq 0$$

がえられる。これは制御のための  $b, c$  と  $r$  に関する条件である。以後これが満たされておると仮定し、従って変換 (5) は自由に適応されるとする。直ちに

$$(F) \quad \dot{x} = Ax + f(\sigma)b, \quad \sigma = c'x - rf(\sigma)$$

がえられ、これが '今後扱う基本系' である。((6) は (F) に対する座標変換  $x = Px$ ” によって影響されないことに注意)

$$f(\sigma) = k\sigma + f_1(\sigma)$$

ここに  $k$  は  $\neq 0$  なる定数で、 $f_1(\sigma)$  は  $\sigma$  が小さいとき  $\sigma$  に関し小であると仮定する (すなわち曲線  $f(\sigma)$  は原点で水平でない接線をもつとする)

(F) の線形項の行列はここで

$$(7) \quad \begin{bmatrix} A & kb \\ c' & -kr \end{bmatrix} \text{ であり、(漸近安定性は行列が安定であることを要求している)。ここで } k=0 \text{ に対しては、(4) の固有値は多項式:}$$

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I & 0 \\ c' & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} A - \lambda I & 0 \\ c' & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の根 (すなわち 0 と A の固有値) である。従って十分小さな  $k$  に対してはそれらは、一つは十分小さく、残りの  $n$  個は十分 A の固有値に近いであろう。従って A が正の実数部分をもつ固有値を有するならば (4) も  $k$  が小さいとき同じことが成立する。(調整機構の安定性保証のため  $k$  にはある下限を課すべきであろう)

(c) Lur'ye は特殊な型のリヤプノフ関数

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$$

を導入する。ここで  $B > 0$ ,  $B' = B$  である。これは  $(x, \sigma)$  - 全空間で正定値関数であり、また  $V(0, 0) = 0$ ,  $V$  とその一次偏導関数は全空間で連続である。さらに  $V$  は二つの項の和であり、最初の項は総ての  $x \neq 0$  に対して正であり、第

二項は総ての  $\sigma \neq 0$  に対して正である。従ってその和は  $x=0$ ,  $\sigma=0$  でのみ 0 になり他では正である。

上述の (F) から  $\dot{V}(x, \sigma) = \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} + f(\sigma)\sigma$  がえられる。ここで

$$(8) \quad A'B + BA = -C$$

とおけば、 $C' = -(A'B + BA)' = -(BA + A'B)$  が得られ、 $C$  は二次形式を形成する行列であり、ここで

$$(9) \quad \dot{V} = -x'Cx - rf^2(\sigma) + 2f(\sigma)(Bb + \frac{1}{2}c)'x$$

をうる。従って  $\dot{V}$  は  $x_1, \dots, x_n, f(\sigma)$  の二次形式である。

前述の定理Ⅷに一致する性質をうるためには、この二次形式は負定値でなければならぬ。このことは ①  $\dot{V}(x, 0)$  が負定値、従って  $C > 0$  を意味し ② さらに総ての  $\sigma \neq 0$  と  $r > 0$  に対して  $\dot{V}(0, \sigma) < 0$  を意味する。従って (8) 式の性質が問題であるが、行列  $B, C$  の間の関係について二つの定理がある。(証明略) 定理 IX: もし各  $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$  ならば、対称行列  $B$  は対称行列  $C$  によって (それらの正定値か否かに関係なく) 一意に定まる。従って (8) は二つの行列の間の 1 対 1 の関係 (各  $C$  に対し一つそしてただ一つの  $B$  が存在し、またその逆も成立する) である。

定理 X:  $A$  は安定としよう。もし  $C$  が正ならば (8) の解  $B$  が存在し、正定値である。

ここで任意の行列  $C > 0$  をとり、 $B$  は (8) の解をとり、前述の  $V(x, \sigma)$  を作る。(それは総ての  $(x, \sigma)$  に対し正定値) 前述のごとく  $\dot{V}$  を作れば、すでに考察したようにこれは  $x, f(\sigma)$  の 2 次形式である。総ての  $x, f$  に対して  $-\dot{V} > 0$  となるためによく知られた  $n+1$  個の行列についての Sylvester の不等式をみたさねばならない。 $C > 0$  であるから最初の  $n$  個はすでに満たされており、残るところは最後の一つ

$$(9) \quad \left| -\frac{C}{(Bb + \frac{1}{2}c)'}, \frac{(Bb + \frac{1}{2}c)'}{r} \right| > 0$$

であり、それは総ての  $x, f(\sigma) \neq 0$  に対し  $-\dot{V} > 0$  となるための必要十分条件である。また (9) は

$$(10) \quad r > (Bb + \frac{1}{2}c)' C^{-1} (Bb + \frac{1}{2}c)$$

であり（証明略）、ラ・サールはこの不等式は  $r > -c' A^{-1}b$  を意味することを示している。従って (6) は (10) が満たされているときに成立する。不等式 (10) は基本制御不等式である。定理 (IX) によりそれは総ての許されうる関数  $f$  に対する制御系の‘完全安定性’を意味する。