

## 均衡と不均衡(あるいは虚構と現実) (VI)

— 均衡解の存在問題 —

甲斐原 一 朗

### 【A】生産可能領域

国民経済の“いとなみ”を事後的にながめると、価格、生産量などの経済諸量が具体的な数字としてとらえられる。そしてこれらの数字を、ただあるがままの経済的現実の記述としてうけとることも一応有意義であろう。しかしこれらの諸量が、特定の値をとって、他の値をとらないことの理由を明らかにすることが、経済理論の重要な課題である。

その理由を明らかにするために、2つの手続き

(i) 個別経済主体の経済的行動の分析

(ii) 多数の個別的経済主体の行動の間の調整過程の分析

を構想することはワルラス以降の伝統である。ワルラスは国民経済の均衡的な調整過程の数式化を試みたが、(彼以後をも含めて)重要な関心は、変数と方程式の数を等しくすることにおかれ、十分に厳密ではなく、均衡の概念も十分に説得的ではない。しかし均衡と不均衡はなお経済学の基本問題だといえる。そこで均衡の概念を現代的水準において展開することとし、そのためまず国民経済のいとなみが行われる場(経済空間)を構成することとしたい。

はじめに  $n$  種類の財から構成される国民経済の  $n$  次元の空間  $R^n$  を仮定し、個別的経済主体としての“企業”と“家計”(あるいは消費者)が、その中でいとなむ行動とその場を規定することとする。

自由競争的企業の行動は、これまで、技術的に実行可能な投入量  $(y_1, \dots, y_n)$  と産出量  $(x_1, \dots, x_m)$  の組合せを、生産関数

$$F(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0$$

の制約の下で、利潤を最大化するという最大値問題として定式化されてきた。しかし関数  $F$  の定義域を明確に意識せぬまま、機械的に微分法の定理を適用することは無意味であろう。したがってここでは、固定的な投入・産出係数をもつ近代工業における線型の工程を前提とする。また方程式の手法によらず、できるだけいわば視覚的に理解することとしたい<sup>1)</sup>。

国民経済（または企業）は、一般にいくつかの工程をもち、それを基盤として技術的に可能な投入量と産出量のあらゆる組が定まり、それらの組の全体は1つの集合をなすが、この集合の構造とその経済学的意味が問題である。

ある工程において、第  $j$  財が絶対量で  $y''_j$  単位投入されて  $y'_j$  単位が産出されたとすれば、結局は純量で  $y_j (= y'_j - y''_j)$  単位生産されたことになる。第  $j$  財の純産出量を  $y_j$  とすれば、これを第  $j$  成分とするベクトル  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  によって、生産の技術的過程が表示される。〔第  $j$  財は、 $y_j > 0$  ならば生産物、 $y_j < 0$  ならば投入財、 $y_j = 0$  ならばこの工程には無関係な財である。〕つまり1つの工程は、 $n$  個の財の係数によって定まり、第  $j$  工程は ( $y$  を  $a$  におきかえて)  $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$  とかける。企業または国民経済に利用可能な工程が  $S$  個あるとし ( $j=1, 2, \dots, ns$ ) それぞれの稼働水準を  $x_j \geq 0$  とすれば、同時操業による産出量は  $y = \sum_{j=1}^s x_j a^j$  である。なお  $(n, s)$  型行列  $A$  を

$$A = (a^1 a^2 \dots a^s) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{bmatrix}$$

と定義すれば、上式は

$$y = Ax, x \geq 0$$

と簡単化される。〔 $A$  は“投入・産出行列”または“技術行列”といわれる〕。上式の形にかくことのできる  $R^n$  の全ての点（正確にはベクトル） $y$  が、経済主体にとって利用可能な生産方法の全体をなすわけで、これを“生産可能領域”  $Y$  と定義する。そしてこの  $Y$  は数学的には、 $S$  個の点  $X = (a^1, a^2, \dots,$

$a^s$  が張る凸錐<sup>2)</sup>である。そしてその経済学的な意味はつぎのごとくである。

(1) 経済学的観点からいえば、生産可能領域は、2つの公準をみたさねばならない。

(a) 第一はいわゆる桃源郷 (Land of Cockaigne) の否定である。現実の経済では、なんらかの望ましい収穫をうるためには、その代償として労働その他のなんらかの犠牲をはらわねばならない。投入・産出の技術的変換関係をあらわす  $Y$  の点  $y$  においては、前述のように、正の成分が生産物に、負の成分が投入財に対応していた。そうすると、 $Y$  が  $y \geq 0$  のような点を含めば、この工程により、いかなる財をも投入することなしに、少くとも一財の正の量が生産されることになる。公準はこのような非現実的事態を否定して、0 以外の  $Y$  の点  $y$  は必ず負の成分を含むことを意味している。数学的には  $Y$  と正象限  $R^n_+$  の共通点は  $0$  のみであるということである。(図1 参照)

(b) 第二の公準は、工程の非可逆性である。一つの工程  $y \in Y$  に対して、 $-y$  は  $y$  における投入・産出財を逆にすることである。もしも  $y \in Y$  とともに  $-y \in Y$  であれば、たとえば、労働といく種類かの財の投入によって鉄が生産されるような工程を逆方向に操業し、鉄の投入によって、失われた労働やその他を回収できることとなるが、それは不可能である。すなわち非可逆性の公準は、 $Y$  内の 0 以外の工程に対しては、必ず  $-y \in Y$  となることを意味し、数学的には、 $Y$  と  $(-Y)$  の共通点は、 $0$  のみであるということである。

2つの公準は、数学的には

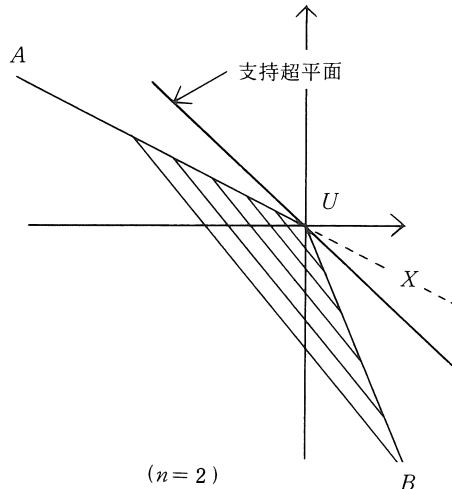


図 1

独立である。凸錐は、原点を端点とするいくつかの（一般には無限個の半直線から構成されているが、どの半直線を原点から反対方向に延長しても、 $Y$ に再び交わらないこと、すなわち  $Y$  が原点の両側に拡がる完全な直線を含まないことを主張するのが、非可逆性の公準である。

他方桃源郷否定の公準は、前述のごとく、 $Y$  が  $R^n$  と 0 以外の共通点をもたぬことを主張するのである。

2つの公準をあわせて、結局  $Y$  の  $R^n$  における位置づけは、図(1)の斜線の部分となる。

(2) 生産可能領域  $Y$  の点  $y$  に対して、 $y \leq z$  のような点が存在すれば、明らかに  $z$  は  $y$  より有利な生産方法であり、企業はこれを採用するであろう。しかし  $Y$  の境界上のどの  $y$  に対しても、上述の意味で、これより有利な工程は  $Y$  内には存在しない。このとき  $y$  は有効点<sup>2)</sup>というが、 $Y$  の有効点全体は一般に  $R^n$  内の曲面になる。そしてこの曲面が凸多面錐<sup>3)</sup>のような尖点をもたず、適当な丸味（連続微分可能性）をもつときが、古典的な生産関数で定式化される場合である。

一般的に技術的に可能な工程  $y$  の集合は、0を含む凸集合でありさえすればよく、その特殊なケースとしての凸錐の場合、 $y \in Y, \lambda > 0$  ならば、 $\lambda y \in Y$  となって、スケールについての収穫不変性が成立する。

(3) 企業は、工程間の優劣を判定しなければならないが、それは有効点間の比較と同値である。しかし有効点同志は、ベクトルの半順序<sup>3)</sup>の意味では判定できず、有効点間の比較も含めて、価格ベクトルが与えられたときの利潤の大小比較とならざるをえない。

第  $i$  財の価格を  $p_i \geq 0$  とすれば、 $p_i$  を成分とする  $n$  次元のベクトル  $p$  で価格体系を表示することができる。価格体系の意味から、少くとも1財の価格は正、したがって  $p \geq 0$  である。そうすると、 $y \in Y$  であれば、内積  $(p, y)$  は、生産物の総価格と、総生産費の差額、すなわち価格  $p$  の下で工程  $y$  を操業したときの利潤である。

なお価格と有効点については、一般につぎのことが指摘される。

(i)  $\hat{y} \in Y$  が有効点であるための必要十分条件は、ベクトル差  $Y - \hat{y}$  が  $R_+^n$  と 0 以外に共通点をもたないこと — (ii)  $\hat{y} \in Y$  が有効点であれば、価格  $p \geq 0$  が存在して

$$(p, y) \leq (p, \hat{y})$$

である。〔後述の分離定理が適用される〕 (iii) とくに  $Y$  が凸多面錐であれば、 $(p, y) \leq (p, \hat{y})$  における価格を正  $p > 0$  に選ぶことができる。(iv)  $\hat{y} \in Y$  に対して、 $(p, y) \leq (p, \hat{y})$  が成立するような正の価格  $p > 0$  が存在すれば、 $\hat{y}$  は有効点である。

ところで、これまで  $Y$  の点は、技術的に可能な、生産方法を表わすものとしてきたが、そうだからといって、これらの全てが実際に実現可能であるわけではない。これまでのモデルは Open Model といわれ、1つの  $y \in Y$  において  $y_j < 0$ , すなわち第  $j$  財が投入財として必要であれば、このような財のある一定量が、本源的な要素として、体系外から流入しなければならない。たとえば、土地、労働などの存在（流入）量には、上の限界がある。第  $n$  財を労働とし、期間内の流入可能量の限界を  $-\eta$  とすれば、実現可能な  $y$  の第  $n$  要素は、条件  $y_n \leq \eta_n$  に服さねばならず、操業水準  $x$  についての制約条件となる。

すなわち limitational factor からの制約を考慮した意味で、実際に実行可能な生産方法  $y$  は、 $Y$  の部分集合を作るのである。

## 【B】選好場・選好順序

消費主体（家計）の各種の財に対する心理的反応現象は、効用あるいは選好の概念として定式化される。

$n$  個の財について、各財のある量の 2 つの組

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ と } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

が与えられたとき、消費者は、財に対する嗜好にもとずいて、つぎの 3 つのうちのいずれか 1 つの判断をください。(i)  $x$  は  $y$  よりも好ましい ( $x \prec y$ ), (ii)  $y$  は  $x$  よりも好ましい ( $y \prec x$ ), (iii)  $x$  と  $y$  は同等に好ましく、選択について無

差別である  $(x-y)$ 。そしてこれらの効用判断  $\leq$  は、財の組の間の一種の大小優劣の比較であって、 $\leq$  は、消費者の公理的行動の公準にもとづく順序関係を満足すると考えてよく

反射律  $x \leq x$

推移律  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

が成立する。

効用判断の可能な財の組の集合  $X$  が与えられ、 $X$  上に、 $\leq$  によって優劣の比較が導入されたとき、1つの選好場が与えられたといわれる。選好場は、個人の嗜好によるものであるから、当然個人によって異なることとなる。また  $x \asymp y$  でしかも  $x$  と  $y$  が無差別のとき、 $x \sim y$  とかくが、これは2条件  $x \leq y, y \leq x$  の連立と同値である。

$x$  と無差別な  $X$  の点は、 $X$  内の部分集合  $X_x$  を作るが、これは無差別面といわれる。〔図2-1は  $n=2$  の場合の無差別曲線群である〕無差別面については、(i)  $x \in X_x$  (ii)  $x \sim y$  と  $X_x = X_y$  は同値 (iii)  $x \asymp y$  と  $X_x \cap X_y = \phi$  は同値が成立する。

ところで図2-1の選好場については、上記のほかにつぎの条件が、暗黙のうちに仮

定されている。(イ) 1つの  $x$  に対して  $y \leq x$  となる  $y$  の全体 (斜線の部分) は凸集合をなす。 $x, y \in X$  であれば、 $x$  と  $y$  の凸結合に対しても効用判断は可能と考えるとよいから、 $x, y, w \in X$  であり、かつ  $z$  が線分  $[x, y]$  上にあるとき

$$x \leq w, y \leq w \text{ ならば } z \leq w$$

となる。これは  $w$  と無差別、または  $w$  より好ましい組を全て集めた集合が凸

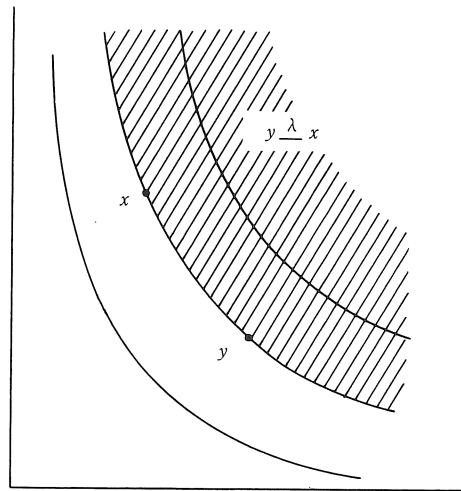


図 2-1

集合となるということにはかならない。上式が成立するとき、与えられた選考順序が凸だということである。〔選考順序の凸性は経済学の伝統的な考え方であるが、凸性はわれわれの分析においても、生産可能領域においてと同様に、重要な役割を演ずる〕

(ロ) 選考場  $X$  の各点  $x$  に実数値  $u(x)$  が付与され、 $X$  の点の間の  $\preceq$  による選好順序と、対応する関数値  $u(x)$  の大小が、完全に対応するとき、 $u(x)$  はこの選好順序の効用指標とされる〔 $x \preceq y$  と  $u(x) \geq u(y)$  は同値である〕 $u$  が 1 つの効用指標、 $f$  が狭義単調増加関数であれば、 $v(x)=f(u(x))$  もまた、効用指標であり、したがって効用指標は一意的には定まらない。ある指標  $u$  を選定すれば、無差別曲面は、 $X_a=\{x \mid x \in X, u(x)=u(a)\}$  とかかれる。〔これは高さ  $u(a)$  に対応する等高点  $x$  の軌跡と考えればよい〕一般に効用指標  $u(x)$  の偏微係数を限界効用として重視してきたが、ここでは微分可能性よりも、効用指標の連続性を重視する。

(ハ) 選好場  $X$  として、伝統的に正象限  $R^+_n$  だけが考えられている。判断の対象が消費財に限られるときは確かにそうであるが、消費主体は、労働、その他の本源的生産要素の供給者でもあり、たとえば、労働の供給は非効用を供給者に与える。したがって負の成分をもつ財の組に対しても、効用判断がおよぶとする方がより一般的であり、 $X$  は必ずしも正象限 ( $R^+_n$ ) に含まれない凸集合と仮定する。ただしこの場合にも、 $X$  は下から有界、つまり定ベクトル  $b$  があって、全ての  $x \in X$  に対して、 $x \geq b$  と仮定される。たとえば、1 年間に供給可能な労働量には限界があり、あるいは生命を維持するに十分でないような消費財の量は、効用判断の対象にならぬと考えているのである。

ところで、消費者は価格を与件、あるいは制約とみなして、行動する。(選好順序の背後にある) 財に対する慾望が、この行動の原動力であり、価格と所得が、この行動に対する制約である。そして、この 2 つの作用の結果、需要が決定される。すなわち、与えられた価格  $p > 0$  と、与えられた所得  $I > 0$  の下における需要量  $x$  は、変域  $X \cap \{x \mid (p, x) \leq I\}$  における最大値問題  $\max u(x)$  の解として与えられるというのが、経済学の伝統的な考え方である。しかし、

この最大値問題が数学的に無意味であったり、実際には解をもたないということになれば、需要関数の概念も、空虚なものとならざるをえない。そこで、前述の選好順序に関する諸前提との関連を、あらためて検討することとする。

(イ) 前述の選好場  $X$  は、0 を含む凸関数で、下に有界である(下界の1つが  $b$  であった) 他方効用指標  $u$  については〔与えられた選好順序が凸であれば〕対応する効用指標  $u$  は、〔 $\omega$  は実数として〕条件

$$z \in [x, y], u(x), u(y) \geq \omega \text{ であれば, } u(z) \geq \omega$$

をみたし、その逆も成立する。〔このような性質をもつ関数は、擬凹関数と定義される。そうすると、変域  $X \cap \{x \mid (p, x) \leq I\}$  は、いつも0を含み、したがって空集合ではないこととなる。〕

(ロ)  $X$  および  $\{x \mid (p, x) \leq I\}$  は、ともに閉集合であるから、その共通部分である変域  $X \cap \{x \mid (p, x) \leq I\}$  も同じく閉集合である。そして  $x$  がこの変域に含まれれば、 $b_j \leq x_j \leq I/p_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) が成立して、上記の変域は有界となる。したがって変域は、コンパクト性(後に説明する)をもつこととなり、連続関数  $u(x)$  は、この集合上で最大値に達する。ただし(予算)制約式  $(p, x) \leq I$  をみたす購入量  $x \in X$  は、(伝統的な考え方をゆるめて)一般に多数あり、その中のどれかがとられるかは、消費者の選択にまかされる。そして消費者の合理的行動を承認して、効用指標  $u(x)$  を最大化する  $x$  がえられるとする。このような最大点の集合を  $\varphi(I, p)$  とする。もちろん、与えられた価格、所得の状況が異なれば、(制約条件が異なるわけで)需要  $x$  も異なる。すなわち  $\varphi(p, I)$  は、価格ベクトル  $(p)$  と、個々の所得  $(I)$  の値から、 $X$  の点  $x$  への写像であり、需要関数といわれる。

(ハ) 効用指標の最大値を  $\omega$  とすれば、 $x, y \in \varphi(I, p)$  であれば、 $u(x)=u(y)=\omega$ 。他方上の変域は凸集合であるから、線分  $[x, y]$  を含み、 $z \in [x, y]$  であれば、 $u$  の擬凹性から、 $u(z) \geq \omega$ 。最大値  $\omega$  の意味から、 $\omega=u(z)$ 、したがって  $z \in \varphi(I, p)$  が成立し、したがって、 $\varphi(p, I)$  は凸集合である。

他方  $\varphi(p, I)$  は、変域  $X \cap \{x \mid (p, x) \leq I\}$  内で、付加条件  $u(x)=\omega$  をみたす点の作る部分集合であるから閉集合である。したがってコンパクト集合  $X \cap$



$\{x \mid (p, x) \leq I\}$  の閉部分集合としてそれ自身コンパクトである。

要約すれば、需要関数  $\varphi(p, I)$  は、認意の  $p > 0, I > 0$  に対して、空でないコンパクトな凸集合となる。

上述のように、関数値  $\varphi(p, I)$  は集合であるから、需要関数は、いわゆる多値関数であり、また点  $(p, I)$  と集合  $\varphi(I, p)$  とを対応づける点対集合写像ともいえる。古典的・伝統的な分析では、効用指標  $u(x)$  に非常に狭い仮定を設けて、需要関数  $\varphi(p, I)$  を通常の一意関数とする。また  $p_j, I$  等についての偏微分可能性も仮定されるが、これらのきつい諸仮定は、必ずしも十分に説得的ではない。ここでは、はるかにゆるい仮定から、出発することとする。

### 【C】分離定理

生産可能領域における有効点、選好場における飽和点を出発点として、以下の分析では、それらの背景にある、最適あるいは最大値問題の考察が中心的な課題となる。この場合、分析を有効に進めるために、2つの重要な手法がある。一つは、空間を適当な性質によって区分し、問題の集合  $Y, X$  をその適当な部分に分離格納することであり、いま一つは、いわば漠然としている集合  $Y, X$  に、細かな網の目を入れて分割し、扱いやすい形にする手法である。

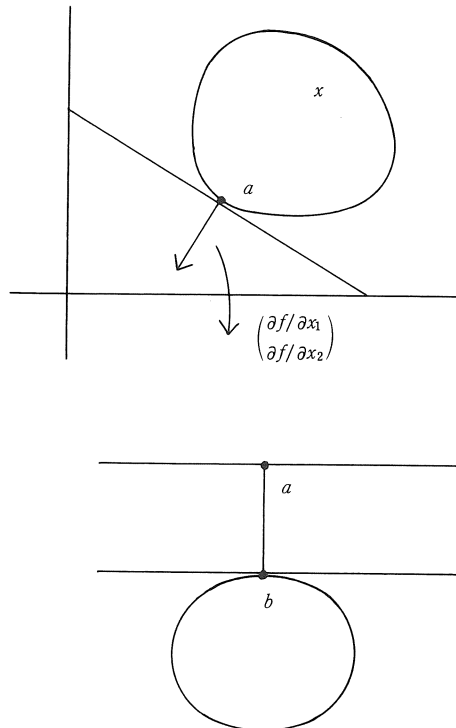


図 2-2

数学的には、前者については、“分離定理”を、また後者については“重心分割”を適用する問題となる。

分離定理は、微分法における接線、接平面からの移行から出発する。 $f(x)$  を  $R^n$  の全域で定義された凸関数とし、 $a$  を  $R^n$  の1つの点とする。(図2-2参照)  $X = \{x \mid f(x) \leq f(a)\}$  は  $R^n$  内の凸集合を作る。 $f(x)$  が連続な偏微分  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$  をもち、 $x=a$  において偏微係数の全部は0でないとすれば超平面  $\sum_{i=1}^n [\frac{\partial f}{\partial x_i}]_{x=a} (x_i - a_i) = 0$  は、 $R^n$  の超曲面  $f(x) = f(a)$  の、 $x=a$  における超平面である。つぎに任意の  $x \in X$  をとると、 $X$  が凸集合であるから、 $[(1-t)a + tx] \in X$  となり、 $X$  の定義から、 $f[(1-t)a + tx] \leq f(a)$  である。

上式を  $0 < t \leq 1$  で考えて  $\frac{f[(1-t)a + tx] - f(a)}{t} \leq 0$ 。ここで  $F(t) = f[(1-t)a + tx]$  とおけば、 $F(0) = a$  であるから上式は  $\frac{F(t) - F(0)}{t} \leq 0$  にほかならない。 $t=0$  における  $F$  の微係数は  $F'(0) = \sum_{i=1}^n [\frac{\partial f}{\partial x_i}]_{x=a} (x_i - a_i)$  となるから、 $\frac{F(t) - F(0)}{t}$  において  $t \rightarrow 0$  ならしめて

$$\sum_{i=1}^n [\frac{\partial f}{\partial x_i}]_{x=a} (x_i - a_i) \leq 0$$

がえられる。これは、集合  $X$  が前述の接超平面によって決定される半空間に含まれることを示している。このようにある超平面が、集合  $X$  の一点  $a$  を通り、かつこの超平面によって決定される半空間が  $X$  を含むとき、支持超平面といわれる。〔 $X$  が空間に支持されると考えてよいだろう〕

以上の議論は微分法を援用してのことであつたが、 $f(x)$  が微分係数をもたない場合は、この方法は不可能である。しかし図からわかるように、関数  $f(x)$  で定義された特殊のタイプではない、一般的な集合においても、支持平面の存在は、直観的にも予想される。この事実を明確に定式化するのが、いわゆる分離定理である。ただし分離定理を理解するためには、その準備として、数列、点列およびその収束の概念が必要である。

(a) 数列とその収束

(i) 番号  $1, 2, \dots, n, \dots$  の各  $n$  に対して、ある実数  $x_n$  が対応づけられているとき、これを数列といい  $\{x_n\}$  とかく。

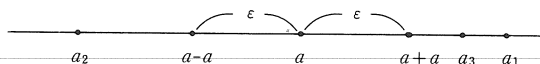


図 3

実数直線上に数列  $x_1, x_2, \dots$  をドットしてゆき、(図3参照) 任意の実数  $\varepsilon$  に対して、不等式  $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$  が成立するような番号  $n(\varepsilon)$  ( $\leq n$ ) を選ぶことができるとき、数列  $\{x_n\}$  は、“ $a$  に収束する” といい、 $a$  を  $\{x_n\}$  の極限値といい、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  とかく。

(ii) 数列  $\{x_n\}$  は、(α)  $x_{n+1} \geq x_n$  のとき単調増加、(β)  $x_{n+1} > x_n$  のとき狭義単調増加、(γ)  $x_{n+1} \leq x_n$  のとき、単調減少、(δ)  $x_{n+1} < x_n$  のとき狭義単調減少という。なお収束については、(a) 単調増加数列  $\{x_n\}$  は、(i) 上に有界であれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$ 。(ii) 上に有界でなければ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  (b) 単調減少数  $\{x_n\}$  は (iii) 下に有界であれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$  (iv) 下に有界でなければ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  である。

### (b) 点列の収束

上述の数列の収束の概念は、実数体系  $R$  に極限の概念を導入したのであるが、点列の収束は、これを  $R^n$  へ拡張したものである。数列の収束には（ここでは省略したが）絶対値の概念が有効である。2 数  $a, b$  の差の絶対値  $|a-b|$  は、この 2 数の実数直線上における距離である。 $R^n$  における点列（正確にはベクトルの列）の収束についても、この空間に絶対値、距離の概念を導入することを考える。

$x \in R^n$  とし、その第  $i$  成分を  $x_i$  とするとき

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

を、 $x$  のノルムというが、これは、実数の絶対値を、 $R^n$  へ拡張したものである。また  $R^n$  の 2 点  $x$  と  $y$  との間の距離  $d(x, y)$  は、 $x, y$  の差のノルムとして

$$d(x, y) = \|x - y\| = d(y, x)$$

と定義され、 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  となる。

さらに、 $x, y \in R^n$  の内積

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

が導入され,  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$  が成立する。

ところで数列と同じ要領で

$R^n$  の点列を考え,  $a, x^\nu \in R^n$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) に対して

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} d(x^\nu, a) = 0$$

なるとき, 点列  $\{x^\nu\}$  は  $a$  に収束するといい,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = a$  とかく。数列  $d(x^\nu - a)$  が 0 に収束するということである。

さらに行列  $A$  の要素を  $a_{ij}$  とすれば, ベクトルの場合と同様に, 行列のノルム

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

が導入され, ノルムによる収束の概念も, 結局各要素毎の実数の収束に帰せられる。したがって行列の列  $\{A_\nu\}$  が行列  $A$  に収束するということは,  $A_\nu$  の要素を  $a_{ij\nu}, a_{ij}$  とするとき,  $\lim a_{ij\nu} = a_{ij}$  (各  $i, j$  について) となることを意味する。

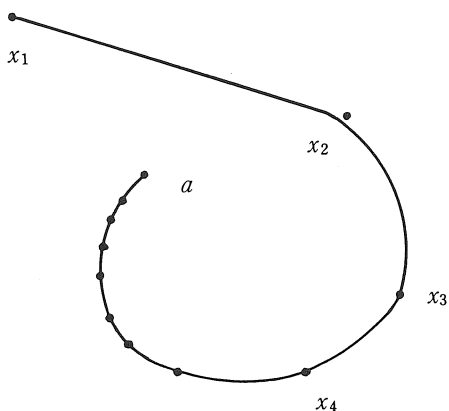


図 4

### (c) 連続写像

(i) 写像  $f: X \rightarrow Y$  の定義域 ( $X$ ), 値域 ( $Y$ ) の双方に点列の収束という極限算法が与えられている場合, つまり極限算法を保つような写像は連続写像といわれ, 経済学においても重要である。すなわち  $f: X \rightarrow Y$  の定義域  $X$  の点  $a$  に収束する任意の点列  $\{x^\nu\}$  に対応する値域  $Y$  における像の点列  $\{f(x^\nu)\}$  が, 点  $a$  の像  $f(a)$  に収束するとき, 写像  $f$  は,  $a$  において連続であるという。コースーは, このことを,  $a$  の像  $f(a)$  の任意の近傍  $U[f(a), \varepsilon]$  に対して,  $a$  の適

当な近傍  $V(a, \delta)$  を選べば

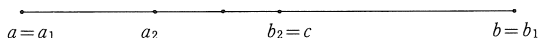
$$f[V(a, \delta)] \subset U[f(a), \varepsilon]$$

となるとき、写像  $f$  は連続と定義する。〔コーシーの条件〕これを拡張して、 $X$  のどの点においても連続であるとき、 $f$  は  $X$  において連続という。

ところで、これまでは閉集合を考えていたのであるが、開集合では、上のような定義域 → 値域という移行とは逆に、値域 → 定義域の方向をとって、“ $f: X \rightarrow Y$  が連続であるための必要十分条件は、値域  $Y$  の任意の開集合  $T$  の逆像  $f^{-1}(T)$  が、定義域  $X$  の開集合であること” となる。さらにこれと対称的に、“ $f: X \rightarrow Y$  が連続であるための必要十分条件は、値域  $Y$  の任意の閉集合  $T$  の逆像  $f^{-1}(T)$  が定義域  $X$  の閉集合になることである。” さらに合成写像についても、“ $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  がともに連続ならば、合成写像  $gf: X \rightarrow Z$  も連続である。”

(ii) 連続関数の最大(小)値は、われわれの重要な関心であるが、微積分学では、“閉区間  $[a, b]$  で定義された実数値連続関数  $f(x)$  は、この区間内で、実際に最大値最小値をとる” とされる。しかし区間  $[a, b]$  を  $(a, b)$  におきかえたと結論は必ずしも正しくない。これは両端点を含めた区間  $[a, b]$  の位相的性質が関与するためと考えられる。確かに任意に与えられた  $[a, b]$  の数列は、収束するとは定っていない。“この数列から適当な部分列を選ぶ” 必要がある。区間  $[a, b]$  を  $c$  で 2 等分して、2 つの区間  $[a, c], [c, b]$  に区分する。このうちの 1 つは、初めに与えた数列  $\{x_\nu\}$  の項を無限個含むこととなる。それをたとえば  $[a_2, b_2]$  とし、 $[a_2, b_2]$  に含まれる部分列を  $\{x_{2\nu}\}$  とする。〔原数列をあらためて  $\{x_{1\nu}\}$  とかく〕 つぎに全く同様にして、 $[a_2, b_2]$  を 2 等分して、 $\{x_{2\nu}\}$  の適当な部分列  $\{x_{3\nu}\}$  を含む  $[a_2, b_2]$  の部分区間  $[a_3, b_3]$  とする。以下同じことをくりかえすと

$$(\text{区間列}) \quad [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_\mu, b_\mu]$$



(部分列の列)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\mu \leq a_{\mu+1} \leq \dots \leq b_{\mu+1} \leq b_\mu \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$   
 がえられる。そして区間の長さについては  $|a_\mu - b_\mu| = \frac{1}{2^{\mu-1}} |a_1 - b_1|$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) がえられ、原系列と部分列を

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1\nu}, \dots$$

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2\nu}, \dots$$

$$x_{\mu 1}, x_{\mu 2}, \dots, x_{\mu \nu}, \dots$$

とかけば、 $\{x_{\mu+1, \nu}\}$  は  $\{x_{\mu \nu}\}$  の部分列、 $\{x_{\mu \nu}\}$  は区間  $[a_\mu, b_\mu]$  の数列である。そして上の配列の対角線に並ぶ実数をとって作った数列  $\{x_{\mu \mu}\}$  は、原数列の部分列である。 $a_\mu \leq x_{\mu \nu} \leq b_\mu$  であるから、問題の数列  $\{x_{\mu \mu}\}$  の第  $\mu$  項  $x_{\mu \mu}$  は、不等式  $a_\mu \leq x_{\mu \mu} \leq b_\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots$ ) をみたす。前にみたように  $a_\mu$  は単調増加で上に有界、 $b_\mu$  は単調減少で下に有界であるから、それぞれ収束して、 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_\mu = \alpha$ ,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} b_\mu = \beta$  とおける。他方  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} |a_\mu - b_\mu| = 0$  であるから、 $\alpha = \beta$  となり、 $a_\mu \leq x_{\mu \mu} \leq b_\mu$  から、 $\{x_{\mu \mu}\}$  も同じ極限值に収束することとなる。

すなわち“区間  $[a, b]$  のいかなる数列  $\{x_\nu\}$  から、収束する部分列を選びだすことができる”のであるが、このような操作が可能である距離空間  $X$  はコンパクトであるといわれる。コンパクト空間のどこかに、無限個の異なる値が現われる点列  $\{x_\nu\}$  が、無限個コンパクトに密集してくる意味と理解してよいだろう。 $R^n$  におけるコンパクト集合の特徴はつぎのごとくである。

(i) 距離空間  $X$  の部分集合  $A$  は、“ $A$  が適当な大きさの近傍  $U(a, \varepsilon)$  に含まれるとき、有界であるという。また  $A$  は  $X$  の閉集合である。

(ii) コンパクトな距離空間  $X$  上で定義された実数値連続関数  $f: X \rightarrow R$  は、 $X$  上で最大(小)値をとる。

(iii)  $X$  をコンパクトな距離空間、 $A$  を  $X$  の閉集合とすれば、 $A$  もコンパクトである。

(iv)  $X, Y$  を距離空間とし、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとすれば、 $X$  がコンパクトなら、像  $f(x)$  もコンパクトである。

(v)  $X, Y$  は距離空間、かつ  $X$  はコンパクトである。 $f: X \rightarrow Y$  が、 $Y$  の上への連続な一対一写像であれば、逆写像  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  も連続である。

(vi)  $R^n$  の部分集合  $A$  が、コンパクトであるための必要十分条件は、 $(\alpha)$   $A$  は有界である  $(\beta)$   $A$  は  $X$  の閉集合であることである。

以上を準備段階として、標題の分離定理にかえる。 $R^n$  の空でない閉凸集合  $X$  と、その外部の点  $a \notin X$  が与えられたとき、 $a$  と  $X$  を、それぞれ反対側の半空間に含む超平面が存在することを主張するのが、分離定理である。

まず点  $a$  と集合  $X$  との距離  $d(a, x) = \delta$  は  $a \notin X$  であるから、 $\delta > 0$ 。他方距離は、 $d(a, x) = \inf_{x \in X} d(a, x)$  と定義されるから、 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} d(a, x) = \delta$  となるものがある。そうすると、数列の収束の定義から、ある番号  $N$  以上の  $\nu$  に対しては、 $d(a, x^\nu) \leq 2\delta$ 、すなわち  $x^\nu \in \bar{U}(a, 2\delta) = \{x \mid d(a, 2\delta) \leq 2\delta\}$  ( $\nu = N, N+1, \dots$ ) となるが、閉球近傍  $\bar{U}(a, 2\delta)$  はコンパクトであるから、 $\{x^\nu\}$  のある部分列で収束するものがある。したがって  $\{x^\nu\}$  自身が収束するとして、 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} x^\nu = b$  とおくと、 $X$  は閉集合であるから、 $b \in X$ 。また  $d(a, x)$  は  $x$  の連続関数であるから

$$d(a, b) = d(a, \lim_{\mu \rightarrow \infty} x^\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} d(a, x^\nu) = \delta$$

すなわち  $\delta = d(a, b) = \min d(a, x)$  (全ての  $x \in X$  に対して) である。

ここで  $p = b - a$  を法線ベクトルとし、点  $b$  を通る超平面

$$(p, x) = (p, b) = \alpha$$

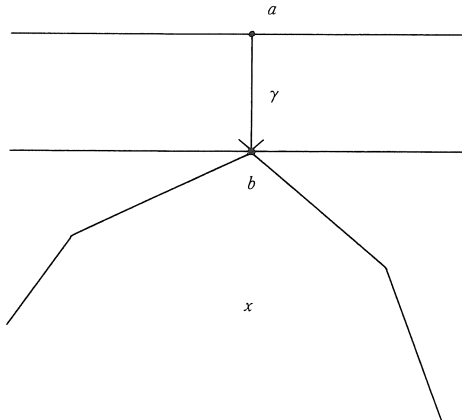


図 6

がえられる。そして

$$\begin{aligned} (i) \quad (p, a) &= (b-a, a) = (b-a, a-b) + (b-a, b) \\ &= -\delta^2 + (p, b) = -\delta^2 + \alpha < \alpha \end{aligned}$$

(ii) 任意の  $x \in X$  をとれば、 $b \in X$  であるから、線分  $[b, x] \subset X$ 。 $b$  と  $x$  の凸結合は、 $x(t) = (1-t)b + tx$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) であるが、 $x(t) \in X$  であるから、 $d(a, b) \leq d(a, x(t))$  となる。したがって

$$\begin{aligned} \|b-a\|^2 &\leq \|x(t)-a\|^2 \\ &= \|(1-t)(b-a) + t(x-a)\|^2 \end{aligned}$$

↓

$$0 \leq (t-2)\|b-a\|^2 + 2(1-t)(b-a, x-a) + t\|x-a\|^2$$

ここで  $t \rightarrow \infty$  ならしめると、極限において

$$(b-a, x-a) - \|b-a\|^2 \geq 0 \rightarrow (b-a, x) \geq (b-a, b)$$

$$\text{すなわち} \quad (p, x) \geq (p, b)$$

がえられる。

以上を要約して、 $a$  と  $X$  を、それぞれ反対側の半空間に含む分離超平面が存在することがわかる。

なお（ここでは  $b$  を通るものであったが） $a$  を通り同じ法線方向比をもつ超平面を採用すれば  $(p, a) = \alpha$ 、 $(p, x) > \alpha$  となる。同じく  $a, b$  の中点を通る超平面をとれば、 $(p, a) < \alpha$ 、 $(p, x) > \alpha$  となる。

こうして求めた超平面は、 $b$  における前述の支持超平面にはかならない。しかし  $b$  は任意に与えられた境界ではないから、定理の系として“ $X$  を空でない凸集合とすれば（閉集合でなくともよい） $a$  が  $X$  の境界点であれば、 $a$  を通る支持超平面が存在する”は、有用である。

なお分離定理の内容は、応用目的によっていろいろな形式にかきかえられるが、とくにつぎの2つは、経済分析において重要である。

(i)  $R^n$  の2つの集合  $X, Y$  について

$$(p, x) \geq \alpha \quad (\text{全ての } x \in X \text{ に対して})$$

$$(p, y) \leq \alpha \quad (\text{全ての } y \in Y \text{ に対して})$$



が成立するとき、 $X$ と $Y$ は、超平面  $(p, x) = \alpha$  によって分離される。

(ii) 凸集合  $X$  が正象限  $R^+_n$  の内点を含まなければ、 $X$ と $R^+_n$ は、原点を通り非負の係数 ( $p \geq 0$ ) をもつ超平面  $(p, x) = 0$  によって分離される。〔この特別な場合として、凸集合  $X$  と正象限  $R^+_n$  が交わらないか、あるいは原点のみを共有するときは、 $X$ と $R^+_n$ は原点を通して、非負の係数をもつ超平面によって分離される〕

### 【D】需 給 関 数

国民経済の問題にかえり、多数の主体の行動の相互間の制約と調和を考察することとする。

各主体の経済行動のスケジュールは、社会の全構成員については、必ずしも実現するとは限らない。各主体のスケジュールは、結局与えられた価格状況に應ずる財の購入・販売量の計画であり、社会全体として販売・購買の希望量が均衡し、交換が過不足なく行われたい限り、個別のスケジュールを全ての主体について実現せしめることはできない。

ところで社会全体としての予定量のギャップは、価格状況によって異なり、ある特定の価格状況の下ではじめて均衡状態が実現する。このような特定の均衡価格体系が、現実の価格体系であることを証明するのが、一般均衡論の課題である。

ワルラスをはじめいくつかの一般均衡モデルがあるが、（細部の定式化は若干異なるとしても）その基本的性質には大差がなく、均衡の存在という事実の背後にある本質的な“からくり”は全く同一だともいえる。したがって諸モデルに共通で、しかも均衡存在問題において決定的に重要な役割を演ずる特徴だけを具え、他の点では全く自由な解釈を許すような抽象モデルを考えることが有効であろう。そのような試みとして、Arrow & Debreu のゲーム論的モデルと、Gale および二階堂のモデルがあるが、ここでは二階堂モデルを中心として検討することとしたい。

まず需給関数の問題がある。国民経済全体の需要関数と供給関数は、主体の個別需要・供給関数の総体としてえられる。そして個別需要・供給関数は、主体に関する最適・最大値問題の解としてえられる。しかし任意に与えられた価格に応じて、効用最大あるいは利潤最大の問題を解きうるかどうかについては、なお検討の余地がある。確かに前述のように、変域  $X \cap \{x \mid (p, x) \leq I\}$  における  $\max u(x)$  を求めるため、任意に与えられた正の価格の下で、効用最大値問題が解をもち、需要関数  $\varphi(p, I)$  を構成することができた。しかし利潤最大値にはなお問題が残る。とくに生産単位  $k$  の工程が、(ここで仮定しているように)  $y = Ax, x \geq 0$  の形で表示される凸面錐である場合、利潤最大値問題は、特定の価格の下で解きうるにすぎない。すなわち価格  $p$  のとき、 $(p, y) > 0$  となるような  $y \in Y_k$  があれば、凸錐であるから  $\lambda y \in Y_k (\lambda > 0)$  であり、利潤  $(p, \lambda y) = \lambda (p, y)$  も、 $\lambda \rightarrow +\infty$  とともに  $\rightarrow +\infty$  となり、最大値が存在しないこととなる。(註(2)(ハ)参照)

ところでこの困難は、主として最大値問題の変域が有界でないことによると思われるので、適当な方法で最大値問題の変域を有界な範囲に限定することを考えねばならない。そのための前提としてまず、均衡解が存在する場合、均衡需要量  $\hat{x}^i$  や均衡生産量  $\hat{y}^k$  などが分布する範囲を検討することとする。均衡解  $[p; \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^l; \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^m]$  が存在するとすれば、需要均衡の条件として

$$\sum_{i=1}^l \hat{x}^i \leq \sum_{i=1}^l a_i + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k \quad (a^i \text{ は } i \text{ の初期有量})$$

が成立する。ついで上の式を満足するあらゆる組

$$[x^1, \dots, x^l; y^1, \dots, y^m] \quad x^i \in X_i, y^k \in Y_k$$

を作る。そしてそれらの組のどれかに  $x^i$  としてあるられる  $X_i$  の点の集合を

$\tilde{X}_i$  とし、同じく  $y^k$  としてあらわれる  $Y_k$  の点を  $\tilde{Y}_k$  とおく。 $X = \sum_{i=1}^l X_i, Y = \sum_{k=1}^m Y_k$  とおいて、 $\tilde{X}_i = X_i \cap (a + Y - \sum_{s \neq i} X_s - R^+)$  ( $i=1, \dots, l$ ) および  $\tilde{Y}_k = Y_k \cap (X - a - \sum_{t \neq k} Y_t + R^+)$  ( $k=1, \dots, m$ ) と定義される。集合  $\tilde{X}_i$  および  $\tilde{Y}_k$  はともに、空でない凸集合であり、有界集合である。(証明略) 均衡解  $\hat{x}^i, \hat{y}^k$  が存在すれば  $\hat{x}^i \in \tilde{X}_i, \hat{y}^k \in \tilde{Y}_k$  である。

つぎに  $c_j < d_j$  なる 2 つの定数を選定すれば、集合

$$(1) \quad E = \{x \mid x \in R^n, c_j \leq x_j \leq d_j\} \quad (j=1, \dots, n)$$

は超直方体であり、これはコンパクトである。他方  $\tilde{Y}_k (k=1, \dots, m)$  は有界であるから（諸般の事情を考えて）十分に大きな超直方体  $E$  を選定すれば、 $\tilde{Y}_k$  の全てを  $E$  の中に含ませることができ、共通部分  $Y_k \cap E$  はコンパクトな凸集合となる。

こうして利潤最大値問題の変域  $Y_k$  を  $Y_k \cap E$  に制限した上で、この中で供給関数  $\varphi^k(p)$  と利潤関数  $\pi_k(p)$  を定義する。なお変域の制限によって、価格ベクトルの条件  $p > 0$  を、 $p \geq 0$  にゆるめることもできる。すなわち供給関数と利潤関数は、それぞれ

$$(2) \quad \varphi^k(p) = \{y^k \mid y \in Y_k \cap E \text{ の下で } \max(p, y) = (p, y^k)\}$$

および

$$(3) \quad \pi_k(p) = \max(p, y) \quad (\text{制約 } y \in Y_k \cap E \text{ の下で})$$

と定義される。 $Y_k \cap E$  がコンパクトであり、その上の関数  $(p, y)$  は連続であるから、（前にも述べたように）必ずその最大値  $\max(p, y)$  が存在するから、上記の 2 式は矛盾なく定義される。なお  $\pi_k(p)$  は通常の一意関数であるが、 $(p, y)$  の最大点  $y^k$  は、一般に多数あるから、 $\varphi^k(p)$  は集合を値とする多値関数（あるいは多値写像）である。

さらに需要関数に対応するいま 1 つの超直方体をつくる。

(1) 式の  $d_j$  を成分とするベクトルを  $d$  とし、各  $i$  について、 $h^i > a^i + m \times d$  および（任意の  $x \in X_i$  に対して） $h^i > x$  をみたすような  $h^i$  を 1 つ選定する。これと前述の下限  $b^i$  とあわせて

$$(4) \quad E_i = \{x \mid x \in R^n, b^i \leq x \leq h^i\} \quad (i=1, \dots, l)$$

なる超直方体をつくる。〔明らかに、 $X_i \supset E_i \supset \tilde{X}_i (i=1, \dots, l)$  となる。〕

消費単位  $i$  の収入は、初期保有  $(p, a^i)$  と、利潤  $\pi_k(p)$  からの配分  $\sum_{k=1}^m \alpha_{ik}$   $\pi_k(p)$  との合計である。〔ここで  $\sum_{i=1}^l \alpha_{ik} = 1$  である〕他方需要  $(p, x)$  は、収入の制約の下で、 $\max u_i(x)$  となるように決定されるのであるから、需要関数は、各  $i$  について

$$(5) \quad \varphi^i(p) = \{x^i \mid x \in E_i, (p, x) \leq (p, a^i) + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p)\}$$

の下に  $\max u_i(x) = u_i(x)$

と定義される。〔この変域は、超直方体と半空間との共通部分であり、コンパクトであるから、前述のように、連続関数  $u_i(x)$  は必ず最大値をもつ。したがって任意の  $p \geq 0$  に対して、(5) 式は矛盾なく成立する〕ただし  $\varphi_i(p)$  も、集合を値とする多意関数である。

以上で、個別需要・供給関数が定義されたのであり、これらを総計することによって、体系全体の総需要関数

$$(6) \quad \varphi(p) = \sum_{i=1}^I \varphi^i(p)$$

と総供給関数

$$(7) \quad \psi(p) = a + \sum_{k=1}^m \psi^k(p)$$

がえられる。

ところで、需給関数 (6) および (7) 式は、前述のごとく、一般に集合を値とする関数であり、特別な場合に限り、通常の一意関数となる。したがって体系の均衡状態は

$$\varphi(p) = \psi(p)$$

ではなく、ある与えられた価格ベクトル  $p$  において、 $\varphi(p)$  と  $\psi(p)$  とが、共通要素を含むこと、すなわち

$$(8) \quad \varphi(p) \cap \psi(p) \neq \emptyset$$

によって表示される。(8) 式は、 $\varphi(p)$  と  $\psi(p)$  のベクトル差、すなわち超過供給関数  $[\varphi(p) - \psi(p)]$  が、0 を含むこと、すなわち

$$(9) \quad \varphi(p) - \psi(p) \ni 0$$

に同値である。

以後 (8) ないし (9) 式を前提として議論を進めるのであるが、上に定義した需給関数は、一般の (たとえばワルラスの) 均衡モデルに、若干の修正を加えた上で作られている。そこで、前述の均衡  $\varphi(p) \cap \psi(p)$  について論ずる

ことが、一般の均衡モデルにおける均衡解の存在問題と、どう対応し、関連するかを、ここで概観しておくことが必要であろう。

第一に、一般モデルにおける均衡解を

$$[\hat{p}; \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_l; \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m]$$

としたとき、 $p=\hat{p}$ において、均衡  $\varphi(p) \cap \psi(p) \ni \phi$  が成立するか、どうかである。

最大値問題の解は、 $\varphi^i(\hat{p})$  および  $\psi^k(\hat{p})$  であるから、 $\hat{x}_i \in \varphi^i(\hat{p})$  および  $\hat{y}_k \in \psi^k(\hat{p})$ 。さらに  $\sum_{i=1}^l \hat{x}^i \in \varphi(\hat{p})$ ,  $\sum_{k=1}^m \hat{y}^k \in \psi(\hat{p})$ 。

他方需給均衡  $\sum_{i=1}^l \hat{x}^i = \sum_{i=1}^l a^i + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$  が成立しているから

$\varphi(\hat{p}) \cap \psi(\hat{p}) \ni \sum_{i=1}^l \hat{x}^i = a + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$  がえられて、需給均衡  $\varphi(p) \cap \psi(p) \ni \phi$  が成立する。

第二は逆に、 $\hat{p}(>0)$  を需給関係の均衡価格とし、 $\varphi(\hat{p}) \cap \psi(p)$  内の任意の点を

$$\sum_{i=1}^l \hat{x}^i = a + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$$

となるような  $\hat{x}(\in \varphi^i(\hat{p}))$  と、 $\hat{y}_k(\in \psi^k(\hat{p}))$  に分解してえられる組

$$[\hat{p}; \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^l; \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^k]$$

が、一般モデルの均衡解と同値かどうかである。 $\sum_{i=1}^l \hat{x}^i = \sum_{i=1}^l a^i + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$  は明に成立するから、 $\hat{x}^i, \hat{y}^k$  が、最大値問題の解になっておればよい。

(i)  $\hat{y}^k$  が  $(\hat{p}, y)$  の  $Y^k$  における最大点でないとするれば、ある  $z \in Y_k$  において、 $(\hat{p}, z) > (\hat{p}, \hat{y}^k)$  となる。したがって、線分  $[\hat{y}, z]$  上の点  $y(\ni \hat{y}^k)$  は全て  $(\hat{p}, y) > (\hat{p}, \hat{y}^k)$  をみたすこととなる。しかし  $\sum \hat{x}^i = \sum a^i + \sum \hat{y}^k$  が成立しているから、 $\hat{y}^k \in \bar{Y}_k$  となり、 $\hat{y}^k$  は  $E$  の内点である。したがって、上記のような  $y$  のうち十分  $\hat{y}^k$  に近いものは、 $y \in Y_k \cap E$  となり、しかも  $(\hat{p}, y) > (\hat{p}, \hat{y}^k)$  であるから、 $\hat{y}^k \in \psi^k(p)$  の意味に矛盾する。したがって  $\hat{y}^k$  は、 $(\hat{p}, y)$  の  $Y_k$  における最大点である。

(ii) 消費主体  $i$  の  $E_i$  を考えて (図7参照)、 $E_i$  の外部の点  $w \in X_i = b^i$

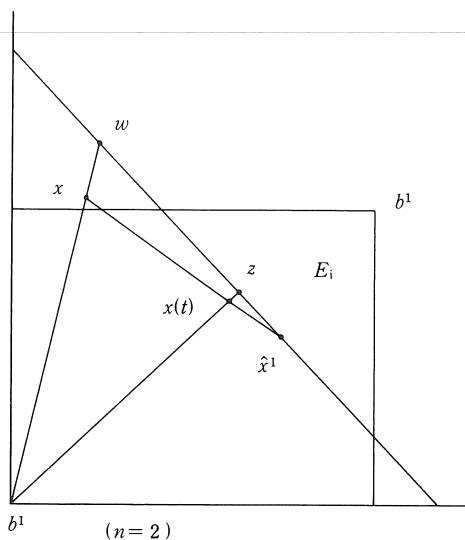


図 7

$+R^n$  が, 予算制約式

$$(p+w) \leq (p, a^i) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(p)$$

をみたし, しかも  $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$  であったとする。線分  $[b^i, w]$  上の点  $x$  を,  $w$  に十分近くとれば,  $u_i(x) > u_i(\hat{x}^i)$  が成立する。つぎに線分  $[\hat{x}^i, x]$  上の点

$$x(t) = (1-t)\hat{x}^i + tx \quad (0 \leq t \leq 1)$$

をとれば,  $u_i(x(t)) \geq u_i(\hat{x}^i)$

ところで,  $\hat{x}^i$  は予算制約式を等号でみたし

$$(\hat{p}, \hat{x}^i) = (\hat{p}, a) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(\hat{p})$$

であった。他方  $w$  は制約式を不等号でみたし

$$(\hat{p}, w) \leq (\hat{p}, a) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(\hat{p})$$

であったから,

$$(\hat{p}, x) < (\hat{p}, w) \leq (\hat{p}, \hat{x}^i)$$

となり, さらに  $(\hat{p}, x_i) < (\hat{p}, \hat{x}^i)$

そして  $\hat{x}^i \in \bar{X}_i$  であるから  $\hat{x}^i < b^i$  となり、 $t$  を十分小さくとれば、やはり  $x(t) < b^i$  である。そうすると

$$(\hat{p}, z) \leq (\hat{p}, \hat{x}^i) \text{ および } x(t) < z \leq b^i$$

をみたすような  $z$  を選ぶことができる。この  $z$  は、 $z \in E_i$ 、かつ予算制約式をみたし、しかも  $u_i(z) > u_i(\hat{x}^i)$  となる。これは  $\hat{x}^i \in \varphi^i(\hat{p})$  の意味に反する。したがって、 $\hat{x}^i$  は、 $X_i$  の全域において、予算制約式の下での効用最大点である。

上述の結果から、一般モデルにおける均衡解の存在問題は、需給関数の均衡解の存在問題に変換できると、考えることができる。

### 【E】不動点の存在問題

需給関数を分析するための準備として、凸関数の重要な性質の1つとして、不動点の問題がある。たとえば、 $X$  を閉区間  $[-1, 1]$  とし、 $f$  を  $X$  から  $X$  への連続な写像とすると、図8が示すように  $f(x^0) = x^0$  なる点  $x^0$  が  $X$  の中に存在する。すなわち不動点が存在するのである。

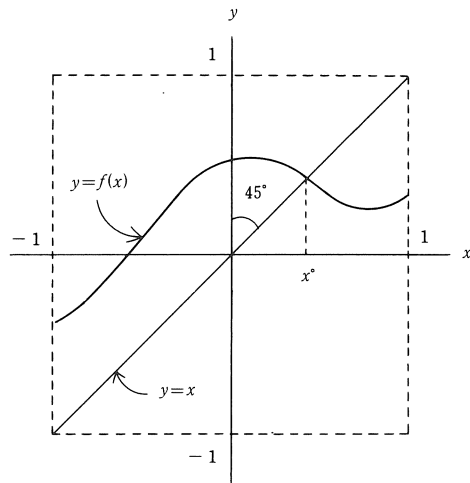


図 8

ところで不動点の存在は、写像の性質と、その写像が作用する空間の性質によって定まるのであり、それらを拡張することによって、一連のいわゆる“不動点定理”が成立する。

#### (a) レフシェットの不動点

$X$  は距離  $d$  をもつ完備距離空間、 $f$  は  $X$  から  $X$  への縮小写像であると仮定する。 $f$  は縮小写像であるから、全ての  $x, y \in X$  に対して

$$d[f(x), f(y)] \leq r d(x, y)$$

となるような正数  $r < 1$  が存在する。 $x^0$  を  $X$  の任意の点。 $x^1 = f(x^0)$ ,  $x^2 = f(x^1) = f^2(x^0)$  とし、一般に

$$x^n = f(x^{n-1}) = f^n(x^0)$$

とする。 $m < n$  であれば

$$\begin{aligned} d(x^m, x^n) &= d[f^m(x^0), f^n(x^0)] = d[f^m(x^0), f^m f^{n-m}(x^0)] \\ &\leq r^m d(x^0, f^{n-m}(x^0)) = r^m d(x^0, x^{n-m}) \\ &\leq r^m [d(x^1, x^1) + d(x^1, x^2) + \cdots + d(x^{n-m-1}, x^{n-m})] \\ &< \frac{r^m d(x_0, x_1)}{1-r} \end{aligned}$$

となる。 $0 < r < 1$  であるから、 $\{x^n\}$  はコーシー列となり、 $X$  の完備性（コーシー列が収束するという条件）を用いると、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $d(x_n, x) \rightarrow 0$  となるような点  $x$  が  $X$  の中に存在することとなる。この点  $x$  が  $f$  の不動点なのである。

#### (b) ブラウエーの不動点定理

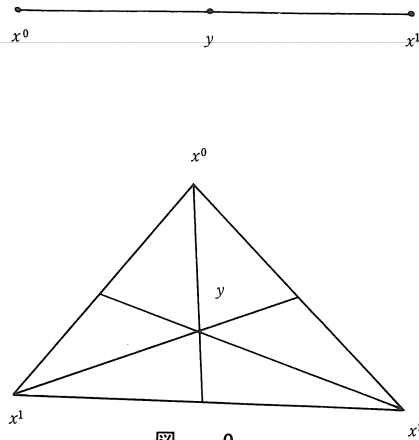
縮小写像という条件を緩和して、一般的な連続写像  $f$  とする。 $R^n$  内のコンパクト集合として基本単体  $S_{k+1} = \{p \mid p \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1\}$  を仮定し、 $f$  を  $S_{k+1}$  の点  $p$  を  $S_{k+1}$  の点  $f(p) = [f_0(p), f_1(p), \cdots, f_k(p) \geq 0, \sum_{i=1}^k f_i(p) = 1]$  に移す連続写像とする。このとき不動点  $\hat{x} = f(\hat{x})$  が存在すると主張するのである。

証明の前提として、まず  $S_{k+1}$  を小単体<sup>5)</sup>の網でおうことを考える。

$k$  次元単体<sup>5)</sup>  $[\sum_{i=1}^k \alpha x^i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1]$  の点で、係数（重心座標といわれる）が、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1/(k+1)$  であるものを重心とよぶが、重心を新しい頂点として追加することによって、初めの単体をいくつかの小単体に分割することができる。（重心分割という）他方  $k$  次元単体の頂点  $x^0, x^1, \cdots, x^k$  の一部（ $m+1$  個）をとって作った単体を  $m$  次元辺単体<sup>5)</sup> というが、その数は、 $k+1$  個の頂点から異なる  $m+1$  個の頂点を選ぶ方法の数だけ、すなわち  $\binom{k+1}{m+1}$  個ある。簡単のため 1 次元単体（図 9 の直線で  $k=1$ ）を考えれば、 $\overline{x^0 x^1}$  の重心  $y$  をとって 2 個の 1 次元単体  $\overline{x^0 y}, \overline{x^1 y}$  に分割する。この場合  $0 (= k-1)$  次元単体  $x^0, y, x^1$ （すなわち頂点）は、 $\overline{x^0 x^1}$  の境界上にあるか否かに応じて、ちょうど



1 個または 2 個の 1 次元小単体（分割によって新しく生じた単体） $\overline{x^0 y}$ ,  $\overline{x^1 y}$  の辺単体になっている。（さらに 2 次元単体の場合も同様に説明できる）このようにして  $(k-1)$  次元単体の分割が完了したと仮定して、 $k$  次元単体の場合を考えると、 $k$  次元単体  $S = \overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$  の  $k+1$  個の  $(k-1)$  次元の辺単体は、それぞれ  $k!$  個



の  $(k-1)$  次元小単体に分割されている。そこで  $S$  の重心  $y$  をとり、これらの  $(k-1)$  次元小単体  $T$  と  $y$  の凸包を作れば、これは  $k$  次元単体であるが、 $S$  は合計  $(k+1)$  個のこのような  $k$  次元小単体に分割される。このとき、 $S$  の  $(k-1)$  次元小単体は、 $S$  の境界上に完全にのっておれば、ちょうど 1 個の  $k$  次元小単体の辺単体になり、 $S$  の境界上にのっていないければ、ちょうど 2 個の  $k$  次元小単体の辺単体となる。

さて、1 つの  $k$  次元単体に重心分割をしてえられた小単体の各を再び重心分割するというように、重心分割を  $\nu$  回行って（ $\nu$  次重心分割） $\nu$  次小単体を作る。

このとき、えられた  $(k-1)$  次元の  $\nu$  次小単体は、まず前と同じく、 $S$  の境界上にあればちょうど 1 つの  $k$  次元の  $\nu$  次小単体となり、境界上になければ、ちょうど 2 つの  $\nu$  次小単体の辺単体となる。（証明略）

ついで集合の直径  $\delta(X)$  なるものを考えることとして、 $\delta(X) = \sup d(x, y)$ （全ての  $x, y \in X$  についての上限）と定義する。 $X$  が有界であることと、 $\delta(X) < +\infty$  とは同値であり、また  $X \supset Y$  ならば  $\delta(X) \geq \delta(Y)$  となる。  $k$  次元単体  $S$  に  $\nu$  次重心分割を行うと、任意の  $\nu$  次小単体  $S^{(\nu)}$  に対して、 $\delta(S^{(\nu)}) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^\nu \delta(S)$  となる。（証明略）

これらのことを前提として、まず(ブラウアー定理の前段として)スペルナーの補助定理が成立する。すなわち

(i) 単体  $S = \overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$  に  $\nu$  次の重心分割がほどこされているとする。この単体分割の各頂点  $y$  に、〔下記の規則に従うような方法で〕 $S$  の頂点  $x^0, x^1, \dots, x^k$  のうちのどれか1つが対応づけられているとし、これを  $\sigma(y)$  で表わす。すなわち  $\sigma(y)$  が、 $y$  を含む最低次元の(もとの  $S$  の)辺単体の頂点になるように対応づけるという規則である。〔簡単のため、 $k=1$  のとき、 $S = \overline{x^0 x^1}$  は線分  $[x^0, x^1]$  であり、 $x^0, x^1$  を含む  $S$  の最低次元の辺単体は、それぞれ  $x^0, x^1$  にほかならないから、 $y \rightarrow \sigma(y)$  の規則から、 $\sigma(x^0) = x^0, \sigma(x^1) = x^1$  となる。他方分割によって新しい(線上の)頂点  $y$  を設けると、 $y$  を含む  $S$  の最低次元の辺単体は  $S$  自身であるから、 $\sigma(y)$  は  $x^0$ 、または  $x^1$  になる。〕 $k$  次元の  $\nu$  次小単体  $S^{(\nu)} = \overline{y^0 y^1 \cdots y^k}$  に対しては、一般には、 $\sigma(y^i) \neq \sigma(y^j) (i \neq j)$  となる  $\nu$  次小単体が少くとも1個、正確にいうと、奇数個存在するというのが、スペルナーの主張である。〔前記の  $k=1$  の場合、 $y$  を左から右に移動しながら、 $\sigma(y)$  の値を調べてゆき、 $\sigma(y) = x^0$  である限り移動をつづけていけば、最後に  $\sigma(x^1) = x^1$  となる。したがって、どこかではじめて  $\sigma(y) = x^1$  となる頂点にであう。この頂点を  $b$ 、そのすぐ左側の頂点を  $a$  とすれば、スペルナーのいう小単体は  $\overline{ab}$  である。このような小単体の個数は、 $\sigma(y)$  の値が  $x^0$  から  $x^1$  へ変化する回数に等しく、これは明らかに1個である〕

以上を前提として、ブラウアーの問題にかえる。〔 $X$  が基本単体  $S_{k+1} = \{p \mid p \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1\}$  の場合に限定して議論を進める〕

まず関数  $f$  を  $S_{k+1}$  の点  $p$  を  $S_{k+1}$  の点  $f(p) = (f_0(p), f_1(p), \dots, f_k(p)) \geq 0, \sum_{i=1}^k f_i(p) = 1$  に移す連続写像であるとする。ついで  $(k+1)$  個の閉集合  $F_i = \{p \mid p \in S_{k+1}, p_i \geq f_i(p)\} (i=0, 1, \dots, k)$  を作る。 $f_i$  が連続写像であるから、 $F_i$  は閉集合になる。この集合族  $\{F_i\}$  について、単体  $S_{k+1} = \overline{e^0 e^1 \cdots e^k}$  の任意の辺単体を  $T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} \cdots e^{i_m}}$  とすれば

$$T \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_m}$$

が成立する(証明略)。

以上を前提として、ブラウアーの問題は、つぎのごとくである。まず、前述のごとく、 $S_{k+1}$  に  $\nu$  次重心分割をして、小単体の網目で蔽うこととする。 $\nu$  次小単体の頂点  $y$  を含む最低次元の辺単体を  $T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} \cdots e^{i_m}}$  とすれば、 $T \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_m}$  であるから、 $F_{i_0}, F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$  の中に、 $y$  を含むものが必ず存在する。したがってそのような  $F_{i_t}$  を 1 つ選び、 $y$  に  $e^{i_t}$  を対応づけて、 $\sigma(y) = e^{i_t}$  と定義する。このような対応  $y \rightarrow \sigma(y)$  は、前述のスペルナーの条件をみたすから、少くとも 1 つの  $\nu$  次正則小単体  $S^{(\nu)}$  が存在する。この  $\nu$  次正則小単体を

$$S^{(\nu)} = \overline{y^{0\nu} y^{1\nu} \cdots y^{k\nu}}, y^{i\nu} \in F_i \quad (i=0, 1, \dots, k)$$

とすれば、前述のごとく

$$\max_{0 \leq i, j \leq k} d(y^{i\nu}, y^{j\nu}) = \delta(S^{(\nu)}) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^\nu \delta(S_{k+1})$$

となる。上式の右辺は、 $\nu \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束するから、左辺も 0 に収束する。

ところで  $S_{k+1}$  はコンパクトであるから、 $(k+1)$  個の点列  $\{y^{i\nu}\}$  ( $i=0, 1, \dots, k$ ) の適当な  $\{y^{i\nu'}\}$  ( $\nu'$  は各点列に共通な数) が、それぞれ  $p^i$  に収束する。そうすると ( $F_i$  が閉集合で、 $\{y^{i\nu'}\}$  が  $F_i$  内から  $p^i$  に収束するから)  $p^i \in F_i$  である。他方  $\max_{0 \leq i, j \leq k} d(y^{i\nu}, y^{j\nu})$  は、 $\nu \rightarrow \infty$  のとき  $\rightarrow 0$  であるから、実は極限  $p^i$  は全て同一の点  $\hat{p}$  でなければならない。したがって  $\hat{p} = p^i \in F_i$  ( $i=0, \dots, k$ ) となる。そこで  $F_i$  の定義から、 $\hat{p}_i \geq f_i(\hat{p})$  ( $i=0, \dots, k$ ) となり、これと同じく定義の  $\sum_{i=1}^k \hat{p}_i = \sum_{i=1}^k f_i(\hat{p}) = 1$  から、 $\hat{p}_i = f_i(\hat{p})$  が、全ての  $i$  について成立する。すなわち  $\hat{p}$  は  $f$  の不動点であるというのがブラウアーの主張である。

### (c) 角谷の不動点

分析の対象をブラウアーの一意写像から、多意写像すなわち点对集合写像へ拡張する。

そこで分析の前提として、いくつかの概念を明かにする必要がある。

(i)  $X, Y$  を  $R^n$  内の 2 つの集合とし、 $Y$  はコンパクトだとする。 $X$  の点  $x$  と  $Y$  の部分集合  $f(x)$  を対応づける点对集合写像  $f: X \rightarrow Y$  を仮定する。(図 10 参照)  $X$  と  $Y$  の直積空間  $X \times Y$  の中の部分集合  $G_f = \{(x, y) \mid y \in f(x), x \in$

$X, y \in Y$  を写像  $f$  の グラフ と定義する。  $G_f$  が  $X \times Y$  の閉集合になるとき、〔すなわち  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x, \lim_{\nu \rightarrow \infty} y^\nu = y, y^\nu \in f(x^\nu) (\nu=1, 2, \dots)$  ならば、必ず  $y \in f(x)$  となるとき〕写像  $f: X \rightarrow Y$  は 閉写像 であるという。

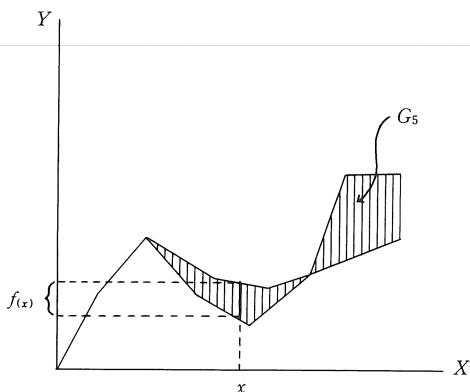


図 10

(ii) 一意写像の 連続性 についてのコーシーの条件を拡張して、点对集合写像 への適

用を考える。そのため 点の  $\varepsilon$  近傍<sup>6)</sup> と並行に、集合  $A$  の  $\varepsilon$  近傍を  $U(A, \varepsilon) = \{x \mid d(x, A) < \varepsilon\}$  と定義すれば、 $U(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} U(a, \varepsilon)$  となるから、 $U(A, \varepsilon)$  は開集合である。そして 点对集合写像  $f: X \rightarrow Y$  において、 $a \in X$  の像  $f(a)$  の任意の  $\varepsilon$  近傍  $U(f(a), \varepsilon)$  に対して、 $a$  の適当な近傍  $U(a, \delta)$  が定まり、 $\varepsilon \in U(a, \delta)$  ならば  $f(x) \subset U(f(a), \varepsilon)$  となるとき、写像  $f$  は  $a$  において 上半連続 であるという。

上述の定義の下では、 $f: X \rightarrow Y$  が閉写像であれば、各点  $a \in X$  において上半連続となる。(証明略)

(iii) ある距離空間  $X$  の 有限個の点の組  $\{a^i \mid i=1, \dots, s\}$  は、点  $a^i$  の  $\varepsilon$  近傍の和集合が  $X$  を含んで、

$$X \subset U(a^1, \varepsilon) \cup U(a^2, \varepsilon) \cup \dots \cup U(a^s, \varepsilon)$$

となるとき  $\varepsilon$  網といわれる。そして  $X$  がコンパクトであれば、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\varepsilon$  網が存在することとなる。(証明略)

上述の諸概念を前提として、角谷の不動点問題を概観すれば、つぎのごとくである。

(a)  $X$  を  $R^n$  のコンパクトな集合とすれば、上述のように、任意の  $\delta > 0$  に対して、 $\delta$  網  $\{a^{i_i} \mid i=1, 2, \dots, s_\delta\}$  が 必ず 存在して、 $X$  を  $\delta$  網でおうことが

できる〔個数  $s_\delta$  は  $\delta$  に関係して定まる〕

$s_\delta$  個の  $\delta$  網の目  $a^{\delta i}$  の各について、関数

$$\theta_i^\delta(x) = \max[0, \delta - d(x, a^{\delta i})] \quad (i=1, 2, \dots, s_\delta)$$

を、 $X$  上で定義する。そうすると  $\theta_i^\delta(x) \geq 0$  であり、さらに（ $\delta$  網の定義から）任意の  $x \in X$  に対して、必ずある  $i$  について  $d(x, a^{\delta i}) < \delta$ 、したがって  $\theta_i^\delta(x) > 0$  となる。結局至るところで  $\sum_{i=1}^{s_\delta} \theta_i^\delta(x) > 0$  であるから、 $s_\delta$  個の連続関数

$$w_i^\delta(x) = \theta_i^\delta(x) / \sum_{j=1}^{s_\delta} \theta_j^\delta(x) \quad (i=1, 2, \dots, s_\delta)$$

をうる。ここで  $w_i^\delta(x) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{s_\delta} w_i^\delta(x) = 1$  であるから、 $w_i^\delta(x)$  を凸結合の係数として用いることができる。なお  $f: X \rightarrow X$  を、 $X$  の点  $x$  に  $X$  の空でない凸部分集合を対応づける閉写像とする（点对集合写像） $w_i^\delta(x)$  と、 $f$  を用いて  $X$  の点  $x$  を  $X$  の点  $g_\delta(x)$  に移す一意連続写像

$$g_\delta(x) = \sum_{i=1}^{s_\delta} w_i^\delta(x) b^{\delta i}$$

を作ることができる。（照11参照）

ここに  $b^{\delta i}$  は  $f(a^{\delta i})$  に含まれる点を任意に選んだものである。 $g_\delta(x)$  は、 $b^{\delta i}$  ( $i=1, 2, \dots, s_\delta$ )、図の  $b^{\delta i}$ ,  $b^{\delta i}$ ,  $b^{\delta i}$  の荷重  $w_i^\delta(x)$  の凸結合であるから、 $g_\delta(x) \in X$  となる。

結局  $g_\delta$  は  $X$  の点を  $X$  の点へ連続に写像し、 $X$  がコンパクトな凸集合であれば、ブラウアーの条件がみたされ、不動点  $x^\delta = g_\delta(x^\delta)$  が存在することとなる。

ところで  $X$  はコンパクトであるから、適当な正数列  $\{\delta_\nu\}$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \delta_\nu$

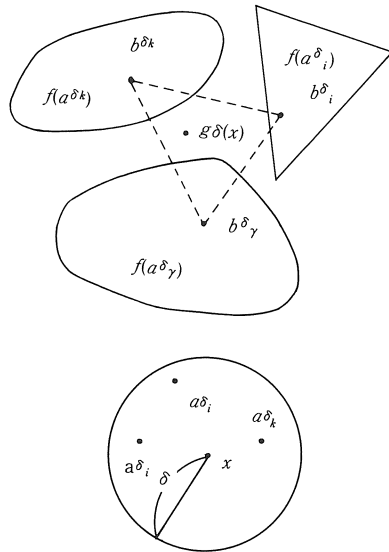


図 11

$=0$  に対して、 $x^\delta = g_\delta(x^\delta)$  をみたす点  $x^{\delta\nu}$  が、 $X$  の点  $\hat{x}$  に収束する。以下この点  $\hat{x}$  を問題とする。

まず  $\nu$  を十分大きくとって、 $\delta_\nu < \delta/2$  および  $d(\hat{x}, x^{\delta\nu}) < \delta/2$  が成立するようにする。このとき

$$d(\hat{x}, a^{\delta\nu i}) \leq d(\hat{x}, x^{\delta\nu}) + d(x^{\delta\nu}, a^{\delta\nu i}) = \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

であり、 $a^{\delta\nu i} \in U(\hat{x}, \delta)$  であり、またこの番号に対して、 $b^{\delta\nu i} \in f(a^{\delta\nu i})$  である。他方  $f$  は、前述のごとく上半連続であるから、(i)  $f(x)$  の  $\varepsilon$  近傍  $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  に対し、 $\hat{x}$  の  $\delta$  近傍  $U(\hat{x}, \delta)$  が存在し、(ii)  $x \in U(\hat{x}, \delta)$  ならば、 $f(x) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  である。そして  $a^{\delta\nu i} \in U(\hat{x}, \delta)$ 、 $b^{\delta\nu i} \in f(a^{\delta\nu i})$  であるから、

$$b^{\delta\nu i} \in f(a^{\delta\nu i}) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon)$$

が成立する。

したがって、 $x^{\delta\nu}$  は凸集合  $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  内の点の凸結合となるから、 $x^{\delta\nu} \in U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  である。ここで  $\nu \rightarrow \infty$  ならしめると、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^{\delta\nu} = \hat{x}$  であり、 $\hat{x} \in U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  がえられる。この結果は、任意の  $\varepsilon$  に対して成立するから

$$d(\hat{x}, U(f(\hat{x}), \varepsilon)) = 0 \quad (\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して})$$

がえられる。ところで任意の  $\varepsilon > 0$ 、 $\varepsilon' > 0$  に対して、 $d(\hat{x}, z) < \varepsilon'$ 、 $d(z, f(\hat{x})) < \varepsilon$  をみたすような  $z$  を選ぶことができ

$$d(\hat{x}, f(\hat{x})) \leq d(\hat{x}, z) + d(z, f(\hat{x})) < \varepsilon' + \varepsilon$$

がえられる。 $\varepsilon, \varepsilon'$  は任意であったから、 $d(\hat{x}, f(\hat{x})) = 0$ 、すなわち  $\hat{x} \in \overline{f(\hat{x})}$  とすることができる。ところで  $f(\hat{x})$  は  $X$  の閉集合であるから  $\overline{f(\hat{x})} = f(\hat{x})$  であり、したがって角谷の不動点、 $\hat{x} \in f(\hat{x})$  がえられる。〔念のためいえば、ブラウアーの場合、“=”であったが、角谷の場合、“ $\in$ ”であることに留意！〕

なおブラウアーの不動点に類似し、同じく経済学研究に重要な役割をはたすものに“固有値”(フロウベニウス根)がある。(小論2参照)そして両者の関連はつぎのように要約できる。

$A$  を1つの行列とするとき、方程式  $(\rho I - A)x = C$  は、(たとえば産業連関分析のように)経済分析にしばしば現われる形式があるが、(マイナスの生産量、投入量、価格が存在しないというように)行列  $A, I$  の要素、解  $x$ 、定数項  $C$  等

が、全て正または0、すなわち非負であることが重要な条件となる。

$(\rho I - A)x = C$  が非負解をもつための条件は、“行列式  $|A|$  の首座小行列式”の値が全て正である”ことである。(ホーキンス・サイモンの条件——以下  $H$ - $S$  条件という)

そこで  $B(\rho) = \rho I - A$  が  $H$ - $S$  条件をみたすような  $\rho$  の全体を  $M$  とする。

(イ) 正のベクトル  $x > 0$  を任意に選び、それに対して  $\rho$  を十分大きくとれば、 $\rho I > Ax$  にできて、 $\rho \in M$  である。またある  $\rho$  が  $M$  に属すれば、 $\rho$  より大きい実数  $\eta$  は、全て  $M$  に属する。(ロ) 逆に  $H$ - $S$  条件をみたしながら  $\rho$  の値をできるだけ小さくすると、無限に小さくはできず、したがって下に有界である。 $\lambda(A) = \inf \rho$  (全ての  $\rho \in M$  についての下限) とおけば、 $\lambda(A) \geq 0$  であるが、 $\lambda(A) \notin M$  であり、結局  $M$  は開区間  $(\lambda(A), +\infty)$  にほかならないこととなる。

ところで  $\lambda = \lambda(A) \notin M$  であるから、 $M$  の定義から、 $(\lambda I - A)x = C$  はどんな  $C > 0$  に対しても非負解をもたないこととなる。それでは  $C = 0$  とした方程式  $(\lambda I - A)x = 0$  が、非負解をもつか否かが問題となる。いわゆる固有値問題であるが、はじめに若干の定義を行う。

行列  $A$  は、線型写像  $x \rightarrow Ax: R^n \rightarrow R^n$  をひきおこすとする。〔前述の  $y = Ax$  を想起すればよい〕0 以外のベクトル  $x \in R^n$  が、この写像によって自身にある数  $\lambda$  を乗じたものに移され、 $\lambda x = Ax$  が成立したとする。このとき  $\lambda$  を  $A$  の固有値、 $x$  を  $\lambda$  に属する固有ベクトルという。 $\lambda x = Ax$  は、 $(\lambda I - A)x = 0$  とかきかえられるが、 $\lambda$  が固有値であれば、解  $x \neq 0$  をもつから、 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$  である。逆に  $\lambda$  が  $\varphi(\lambda)$  の根であれば、 $(\lambda I - A)x = 0$  が解  $x \neq 0$  をもち、 $\lambda x = Ax$  にかきかえられる。したがって  $A$  の固有値と、 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$  の根とは、同じものといえる。 $\varphi(\lambda)$  を  $A$  の固有方程式という。

ところで固有方程式を、行列式の性質に従って  $\lambda$  について展開すると、 $\varphi(\lambda)$  は、 $n$  次の実数係数の整式であるが、一般には  $n$  個の複素根をもち、実数にはならない。したがって、たとえ  $A$  が実数の成分をもつものであっても、

一般の固有値問題では、固有ベクトルとして複素数を成分にもつものを導入しなければならないこととなる。この一般論と対比して、とくに ( $C=0$  とした)  $(\lambda I - A)x=0$  の場合には、前述の  $\lambda(A)=\inf \rho$  が、固有方程式  $\varphi(\lambda)=0$  の根であるばかりでなく、さらに  $\lambda(A)$  に属する固有ベクトルの中に非負のものが存在するというきわめて特徴的な事実が証明される。(フロウベニウスの定理)

さらにある  $x \geq 0$  に対して、 $Ax \geq \mu x$  が成立するような実数  $\mu$  は、不等式  $\mu \leq \lambda(A)$  をみたす。(フロウベニウスの定理) そのような  $\mu$  が作る集合を  $L(A)$  とおけば、 $\mu \in L(A)$  ならば、 $\mu \leq \lambda(A)$  である。フロウベニウスの定理により、ある  $x \geq 0$  に対して、 $Ax = \lambda(A)x$  となり、これは  $Ax \geq \mu x$  が成立する場合とみなされるから、 $\lambda(A)$  自身は  $L(A)$  に属する。さらにある実数  $\mu$  が、 $\mu \leq \lambda(A)$  であれば、 $\lambda(A)$  に属する固有ベクトル  $x$  に対して  $Ax = (\lambda(A))x \geq \mu x$  となるから  $\mu \in L(A)$ 、したがって  $L(A)$  は、 $\lambda(A)$  を右側の端点にもち、左側に無限に伸びた区間となる、結局実数体系  $R$  は、 $\lambda(A)$  を境目として、2つの区間  $L(A) = (-\infty, \lambda(A)]$ ,  $M(A) = (\lambda(A), +\infty)$  に分れることとなる。(図12 参照)

$$\overline{\overline{\lambda(A)}} \\ \overline{L(A) = (-\infty, \lambda(A)]} \cdot \overline{M(A) = (\lambda(A), +\infty)}$$

図 12

以上を前提として、不動点問題との関連を考える。

$S_n$  を基本単体とし、 $\mathcal{Q} = \{x \mid x \in S_n, Ax \geq \lambda x\}$ ,  $\lambda = \lambda(A)$  とおけば、集合  $\mathcal{Q}$  は  $S_n$  のコンパクト凸部分集合である。そこで連続写像  $f: \mathcal{Q} \rightarrow S_n$  を、公式  $f(x) = \rho(x)(I+A)x$ ,  $\rho(x) = 1/(I + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_{ij})$  ( $a_{ij}$  は行列  $A$  の成分) によって作る。ところが、 $x \in \mathcal{Q}$  ならば、 $Af(x) = \rho(x)(I+A)Ax$  は、 $Ax \geq \lambda x$  であるから、 $\rho(x)(I+A)Ax \geq \rho(x)(I+A)\lambda x$ 。他方  $f(x) = \rho(x)(I+A)x$  であるから、 $\lambda \rho(x)(I+A)x = \lambda f(x)$  であるから、結局  $Af(x) \geq \lambda f(x)$  となり  $\mathcal{Q}$  の定義から  $f(x) \in \mathcal{Q}$  となる。したがって  $f(x)$  は  $\mathcal{Q}$  の点を  $\mathcal{Q}$  の点に連続に写像するのであって前述のブラウアーの条件をみたす。したがってブラウアーの不動点  $\hat{x} = f(\hat{x}) = \rho(\hat{x})(I+A)\hat{x}$  が存在することとなる。ところで  $\rho(x) = 1/(I + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_{ij})$



であったから、 $\lambda = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j$  とすれば  $\lambda \hat{x} = A\hat{x}$  となり、 $\lambda$  は固有値、 $\hat{x}$  は  $\lambda$  に属する固有ベクトルとなる。結局固有値と不動点は同一のものとなる。

## 【F】均衡の存在

前々項において、0 を除く非負の価格ベクトルに対して需給関数を定義し、その均衡解の存在問題を考察した。残る問題は、不動点定理を援用して、これと一般的な均衡モデルを接続することであるが、そのための条件を示すものとして、二階堂およびゲールの定理がある。

〔定理〕財の種類を  $n$  個とし、価格  $p \in S_n$  の超過供給関数  $\chi(p)$ 〔供給と需要のベクトル差〕が与えられており、 $\chi(p)$  は、つぎの条件を満足するとする。

(i)  $p \rightarrow \chi(p)$  は、 $S_n$  の点  $p$  に集合  $\Gamma$  の凸部分集合  $\chi(p) \cap \phi$  を対応させる閉写像である。ただし  $\Gamma$  は、 $R^n$  のある超直方体である。

(ii)  $x \in \chi(p)$  ならば、内積  $(p, x) \geq 0$  が、各点  $p \in S_n$  において成立する。

このとき、ある適当な価格  $\hat{p} \in S_n$  において、 $\chi(\hat{p}) \cap R_+^n \neq \phi$ 、すなわち  $\chi(p)$  は、成分が全て非負の財の組  $\hat{x} \geq 0$  を含む。

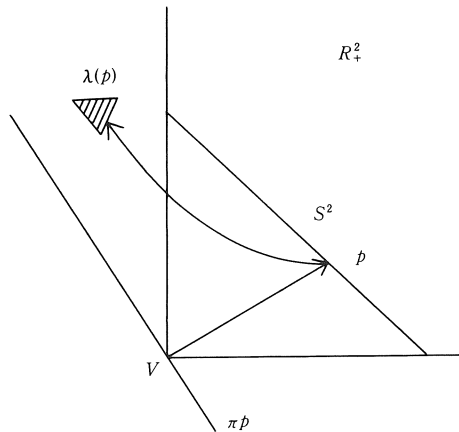


図 13

つまり二階堂は、一般均衡と需給関数との連続性を保証する条件として、 $\hat{x} \geq 0$  をあげるのである。すなわち全ての財について超過供給が非負であることが最も一般的な意味での、経済均衡状態と考えられている。

定理の大筋をみるため2財 ( $n=2$ ) の場合をとる。(図13参照) 価格体系は基本単位  $S^2$  で表わせる。〔経済学では、諸財の価格  $p_j$  の値自体が重要ではなく、これら  $p_j$  の比率  $p_1:p_2:\cdots:p_n$  が重要である〕 $S^2$  上の1点  $p(p_1:p_2)$  を示す) を選び、 $OP$  を法線比とする超平面を  $\pi_p$  とすれば、その方程式は  $(p, x)=0$  である。他方  $p \in S_n$  の超過供給関数  $\chi(p)$  が与えられて、 $\chi(p)$  が、非負の財の組  $\hat{x} \geq 0$  を含む、換言すれば、 $\chi(p) \cap R_+^n \neq \emptyset$  になることを、前述のごとく均衡というのである。図からわかるように、 $p$  が変化するにつれ、 $\pi_p$  の非負領域も変化し、集合  $\chi(p)$  は形を変えながら、この非負領域内を動きまわる。そして結局  $\chi(p)$  は  $R_+^n$  と交わって  $(\chi(p) \cap R_+^n \neq \emptyset)$  という均衡が実現するという主張である。

証明の出発点として、まず価格反応関数を定義する。これは  $R^n$  の任意の点  $x$  と、任意の価格  $p \in S_n$  の組  $[p, x]$  に対して、ある価格  $q = \theta(p, x)$  を対応させるもので

$$(10) \quad \theta_j(p, x) = \frac{p_j + \max(-x_j, 0)}{1 + \sum_{s=1}^n \max(-x_s, 0)} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

と定義する。恒等的に  $\theta_j(p, x) \geq 0$  および  $\sum_{j=1}^n \theta_j(p, x) = 1$  であるから、像  $\theta(p, x)$  は  $S_n$  の点となる。前にも行ったように十分大きな超直方体  $\Gamma$  を設けて、 $x$  の動く範囲を  $\Gamma$  内に制限することとし、直積  $S_n \times \Gamma$  上で定義されて  $S_n$  の値をとる一意連続写像

$$(11) \quad [p, x] \rightarrow \theta(p, x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n$$

がえられる。〔この写像は、いわゆる見えざる手が、現行価格  $p$  と超過供給  $x$  に応じて、新価格を指定する方式だといえる。〕

つぎに与えられた超過供給関数  $\chi(p): S_n \rightarrow \Gamma$  と、価格反応関数  $[p, x] \rightarrow \theta(p, x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n$  を組合わせて、直積  $S_n \times \Gamma$  の任意の点  $[p, x]$  に、同じく  $S_n \times \Gamma$  上の、 $f(p, x) = \{\theta(p, x)\} \times \chi(p)$  と定義される集合  $f(p, x)$  を対応づけ

る写像

$$(12) \quad [p, x] \rightarrow f(p, x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n \times \Gamma$$

を作る。この写像については、つぎのことが指摘される。

(i)  $S_n$  と  $\Gamma$  はともに、 $R^n$  内のコンパクトな凸集合であるから、 $S_n \times \Gamma$  は、 $R^n$  内のコンパクトな凸集合である。

(ii)  $[p, x] \rightarrow p: S_n \times \Gamma \rightarrow S_n$  は一意連続であり、与えられた  $p \rightarrow \chi(p): S_n \times \Gamma$  は閉写像であるから、それらの合成写像、 $[p, x] \rightarrow \chi(p): S_n \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  は閉写像である。他方  $[p, x] \rightarrow \theta(p, x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n$  は一意連続であるから、両者の直積写像である  $[p, x] \rightarrow f(p, x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n \times \Gamma$  は閉写像である。

(iii) 各点  $[p, x]$  の像  $f(p, x) = \{\theta(p, x)\} \times \chi(p)$  は、 $\theta(p, x)$  が 1 点、 $\chi(p)$  が凸集合であるから、 $f(p, x)$  は凸集合である。

したがって前述の角谷の不動点定理の条件がみたされ、 $S_n \times \Gamma$  内に不動点  $[\hat{p}, \hat{x}] \in f(\hat{p}, \hat{x})$  が存在することになる。

これは、 $\hat{p} \in S_n, \hat{x} \in \Gamma$  についての関係式

$$\hat{p} = \theta(\hat{p}, \hat{x}) \quad \text{および} \quad \hat{x} \in \chi(\hat{p})$$

にほかならない。 $\hat{p} = \theta(\hat{p}, \hat{x})$  であるから、(10) 式により

$$p_j = \frac{p_j + \max(-x_j, 0)}{1 + \sum \max(-x_s, 0)} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

が成立する。上式の分母をはらい、 $\sum_{s=1}^n \max(-\hat{x}_s, 0) = \lambda$  とおけば、 $\lambda \hat{p}_j = \max(-\hat{x}_j, 0)$  となる。両辺に  $\hat{x}_j$  を乗じて、総和を作れば

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=1}^n \hat{p}_j \hat{x}_j &= \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \max(-\hat{x}_j, 0) \\ &= -\sum_{j=1}^n \hat{x}_j \max(-\hat{x}_j, 0) = -\sum_{j=1}^n [\max(-\hat{x}_j, 0)]^2 \end{aligned}$$

すなわち  $0 \leq \sum_{j=1}^n [\max(-\hat{x}_j, 0)]^2 = -\lambda(\hat{p}, \hat{x})$  であるが、 $(\hat{p}, \hat{x}) \geq 0$  および  $\lambda \geq 0$  から

$$\sum_{j=1}^n [\max(-\hat{x}_j, 0)]^2 = 0$$

が成立し、各  $j$  について、 $-\hat{x}_j \leq \max(-x_j, 0) = 0$ 、すなわち、 $\hat{x}_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) となり、二階堂の定理が証明される。

ついで、超過供給関数  $\lambda(p)$  の詳細が問題となる。〔事実レフシェフ→ブラウ→角谷における不動点の変化は、前述のごとく、基礎にある超過供給関数の拡張に対応するものであったし、さらに後にみるように、それぞれの均衡理論の違いは、超過供給の理解いかに依存するともいえる。〕

議論の前提として、価格体系を定義しなければならない。均衡モデルにおいて重要なのは、諸財の価格  $p_j$  の値自体ではなく、それら  $p_j$  の比率  $p_1: p_2: \dots: p_n$  である。したがって1つの特定財（たとえば金）を価値尺度財とし、これと諸財との交換比率を与えて、規準化された（尺度財の価格を1とした）価格体系が一般に採用されたきた。しかしここでは、尺度財の概念を拡張して、各財1単位から成る財の組  $u=(1,1, \dots, 1)$  を価額の規準にとり、 $u$  の価額が1に等しいような、すなわち  $(p, u)=\sum_{j=1}^n p_j=1$  となるような価格体系  $p$  を規準化された価格として採用することとする。（ $p \geq 0$  であるが）規準化された価格  $p$  の全体を  $S_n$  とかき、とくに  $S_n$  の点  $p$  で  $p > 0$  となるものの全体を  $S_n^*$  とかくことにする。

供給関数  $\psi(p)$  と需要関数  $\varphi(p)$  のベクトル差、すなわち超過需要関数は  $\chi(p)=\psi(p)-\varphi(p)$  とかける。そして前に定義した超直方体  $E, E_i$  に対して、つねに  $\psi^k(p) \subset E, \varphi^i(p) \subset E_i$  であるから

$$\begin{aligned} \chi(p) &= a + \sum_{k=1}^k \psi^k(p) - \sum_{i=1}^l \varphi^i(p) \\ &\subset \frac{a + E + E + \dots + E - (E_1 + E_2 + \dots + E_l)}{m \text{ 個}} \end{aligned}$$

が成立する。右辺の集合を含む十分大きな超直方体を  $\Gamma$  とすれば（任意の  $p \in S_n$  に対して） $\chi(p) \subset \Gamma$  となる。ここで写像  $p \rightarrow \chi(p): S_n \rightarrow \Gamma$  が  $S_n$  の全域で閉写像であれば、議論は比較的簡単であるが、実は  $\chi(p)$  の閉写像性は、 $S_n$  の全域にわたっては保証されない。それは、個別需要関数  $\varphi^i(p)$  の閉写像性が必ずしも成立しないからであり、したがって、 $\varphi^i(p)$  を修正しなければならない。

消費単位  $i$  の選好場を  $X_i = b^i + R^n_+$  と仮定すれば、所得は

$$I_i(p) = (p, a^i - b^i) + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p)$$

であり、 $(p, a^i - b^i), \pi_k(p), \alpha_{ik}$  はいずれも非負であるから、 $I_i(p)$  は、つねに  $S_n$  上で非負の値をとる連続関数となる。この  $I_i(p)$  を用いると、 $\varphi^i(p)$  は

$$\varphi^i(p) = \{x^i \mid x^i \in E_i(p, x - b^i) \leq I_i(p) \text{ の下で, } \max u_i(x) = u_i(x^i)\}$$

とかきかえられる。ところで前述のように、 $S_n$  上で  $I_i(p) \geq 0$  は成立するが、 $I_i(p) > 0$  は必ずしも成立しない。これは正の保有量： $a^i > b^i$  を仮定せず、ヨリ現実的な  $a^i \geq b^i$  を採用したからである。そして、このようなゆるい仮定が、個別需要関数の閉写像性の考察を複雑にするのである。そこで、あらためて各  $i$  について

$$S_n^i = \{p \mid p \in S_n, I_i(p) > 0\} \quad (i=1, \dots, l)$$

とおく。 $p \in S_n^*$  (すなわち  $p > 0$ ) のとき正の保有量を仮定すれば  $(p, a^i - b^i) > 0$  で、 $I_i(p) > 0$  となる。包含関係としては

$$S_n^* \subset S_n^i \subset S_n$$

が成立する。

このとき

(i)  $\varphi^i(p)$  は、 $S_n^i$  上で閉。すなわち写像  $\varphi^i(p): S_n^i \rightarrow E_i$  は閉写像である。(証明略)

(ii) ついで上の  $\varphi^i(p): S_n^i \rightarrow E_i$  を  $S_n$  上で定義された  $\tilde{\varphi}^i(p): S_n \rightarrow E_i$  に拡張し、しかも  $\tilde{\varphi}^i(p)$  が閉写像であるようにしたい。(それは可能で) まず  $\varphi^i(p)$  は閉で、各点の像  $\varphi^i(p)$  は、 $S_n$  において凸であるから、 $S_n^i$  においても凸である。他方前述の包含関係があって、 $S_n^*$  が  $S_n$  において稠密であるから、 $S_n^i$  も  $S_n$  において稠密である。したがって、 $\varphi^i(p): S_n^i \rightarrow E_i$  を、 $S_n \rightarrow E_i$  の  $\tilde{\varphi}^i(p)$  に拡張できて、 $\tilde{\varphi}^i(p)$  を閉写像とすることができる<sup>8)</sup>。

$\varphi^i(p)$  から  $\tilde{\varphi}^i(p)$  への拡張にともなって、修正超過供給関数

$$\tilde{x}(p) = a + \sum_{k=1}^m \psi^k(p) - \sum_{i=1}^l \tilde{\varphi}^i(p)$$

がえられるが、これは、 $S_n$  の点  $p$  を  $\Gamma$  の凸部分集合に対応づける閉写像である。

残る問題は、 $\tilde{x}(p)$  が  $S_n$  全域において、均衡条件  $\varphi(p) \cap \psi(p) \ni \varphi$ , あるいは  $\psi(p) - \varphi(p) \in 0$  をみたすか、どうかである。

はじめに修正前の  $\varphi^i(p)$  について検討する。

消費単位  $i$  は、超直方体  $E_i$  内で、予算制約式

$$(p, x) \leq (p, a^i) + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p)$$

の制約の下で、 $u_i(x)$  が最大になるように、需要計画  $x^i$  を独自の決定する。しかし実際的には、相互制約をうけるわけで、その結果としての、需要計画  $x^i$  の全体の集合が、 $\varphi^i(p)$  であった。ここで重要なことは、 $\varphi^i(p)$  の点  $x^i$  に対しては、上記の（不等号で成立している）制約条件が、等号で成立することである。

はじめに

$$(p, x) < (p, a^i) + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p)$$

と仮定する。 $\pi_k(p) = (p, y^k)$  であるから

$$\sum \alpha_{ik} \pi_k(p) = \sum \alpha_{ik} (p, y^k) = (p, \sum \alpha_{ik} y^k)$$

ところで  $y^k, 0 \in Y_k \cap E$  で、 $Y_k \cap E$  は凸集合、さらに  $0 \leq \alpha_{ik} \leq 1$  であるから

$$\alpha_{ik} y^k = (1 - \alpha_{ik}) \cdot 0 + \alpha_{ik} y^k \in Y_k \cap E$$

したがって  $\alpha_{ik} \leq d$  で、 $h^i > a^i + md$  から

$$a^i + \sum \alpha_{ik} y^k < h^i$$

が成りたち、 $p \geq 0$  との内積は

$$(p, a^i + \sum \alpha_{ik} y^k) < (p, h^i)$$

となり、これから

$$(p, a^i) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(p) < (p, h^i)$$

がえられる。ところで、 $x^i \in E_i$  であるから、 $h^i \geq x^i$  となるが、 $h^i \ni x^i$  であるから、 $h^i \geq x^i$  である。これから、線分  $[x^i, h^i]$  の点  $x(\ni x^i)$  が、全て  $x \geq x^i$  となることがわかる。したがって、上述のような  $x$  に対して、 $u_i(x) > u_i(x^i)$  が成立する。

他方このような  $x$  が,  $x^i$  に十分近ければ, 予算制約式  $(p, x) \leq (p, a^i) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(p)$  が維持される。しかしこれは,  $x^i$  が効用最大点であることと矛盾する。したがって, はじめの仮定は否定されて,

$$(p, x^i) = (p, a^i) + \sum \alpha_{ik} \pi_k(p) \quad (i=1, \dots, l)$$

が成立しなければならないこととなる。

つぎに, 修正後の需要関数  $\tilde{\varphi}_i(p)$  についても, 上と同様の事実が成立するか, どうかである。

まず  $S_n^i$  上では,  $\tilde{\varphi}_i(p) = \varphi_i(p)$  であるから, あらためて証明する必要はない。あらためて問題としなければならないのは,  $p \in S_n^i$  のような点  $p \in S_n$  における予算制約式の符号である。この場合, 写像の拡張という数学的な概念が必要であり, やや複雑である。

$\tilde{\varphi}^i$  を写像  $\varphi^i$  の拡張と考えて,  $x \in \tilde{\varphi}_i(p)$  のとき

$$x = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s y^s, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s = 1$$

$$y^s = \lim_{\nu \rightarrow \infty} y^{s\nu}, \quad p = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu, \quad p^\nu \in S_n^i, \quad y^{s\nu} \in \varphi^i(p^\nu)$$

とかくことができる。そして  $S_n^i$  上では,  $(p^\nu, y^{s\nu} - b^i) = I_i(p^\nu)$  が成立するから

$$\begin{aligned} (p, x - b^i) &= \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s \lim_{\nu \rightarrow \infty} (p^\nu, y^{s\nu} - b^i) = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s \lim_{\nu \rightarrow \infty} I_i(p^\nu) \\ &= \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s I_i(p) \\ &= I_i(p) \end{aligned}$$

となって, 予算制約式は等号で成立する。

要約すれば,  $\tilde{\chi}(p): S_n \rightarrow \Gamma$  は, 二階堂の定理の条件をみたし, したがってある  $\hat{p} \in S_n$  において,  $\tilde{\chi}(\hat{p})$  は非負のベクトル  $\hat{u} \geq 0$  を含むこととなる。この  $\hat{u} \in \tilde{\chi}(p)$  は,  $\tilde{\chi}(p)$  の定義から

$$0 \leq \hat{u} = \sum_{i=1}^l a^i + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k - \sum_{i=1}^l \hat{x}^i, \quad \hat{y}^k \in \psi^k(\hat{p}), \quad \hat{x}^i \in \tilde{\varphi}^i(\hat{p})$$

の形のベクトル和に分解される。ここで

$$(a) \quad \hat{p} > 0, \text{ したがって } \tilde{\varphi}^i(\hat{p}) = \varphi^i(\hat{p}), \quad \tilde{\chi}(\hat{p}) = \chi(\hat{p})$$

(b)  $\hat{u}=0$ 

が証明されれば、均衡解の存在が証明されたことになる。

(イ)  $\sum b^i < \sum a^i + \sum \bar{y}^k$  となるような  $\bar{y}^k \in Y^k$  ( $k=1, \dots, m$ ) を定義し、初期保有と生産による分を加算すれば、体系全体として、全ての財について、正の供給量を生ぜしめることができるものとした。ここで  $\bar{y}^k$  を採用すれば

$$0 < \sum (a^i - b^i) + \sum \bar{y}^k$$

が成立する。他方超直方体の作り方から、 $y^k \in E$  であるから、 $\pi_k(p) = \max(p, y)$  ( $y \in Y_k \cap E$  の下で) を考慮して、上式と  $p \in S_n$  の内情を作れば

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_i (p, a^i - b^i) + \sum_k (p, y^k) \\ &\leq \sum (p, a^i - b^i) + \sum \pi_k(p) \\ &= \sum (p, a^i - b^i) + \sum \sum \alpha_{ik} \pi_k(p) \\ &= \sum I_i(p) \end{aligned}$$

となり、

$$(b) \sum_{i=1}^l I_i(p) > 0$$

がえられる。ところで、このことは、任意の  $p \in S_n$  に対して、必ずある消費主体  $i$  の所得が正 ( $I_i(p)$ ) ということであることを示し、なおそのような  $i$  は、 $p$  に依存して定まるということである。〔このことは、 $\hat{p}$  に対しても適用され〕価格  $p$  の下で、正の所得をもつ消費単位を  $t$  とすれば、 $I_t(\hat{p}) > 0$  であるから、 $p \in S_n^t$  である。したがって、この  $t$  については、

$$(c) \quad \bar{\varphi}^t(\hat{p}) = \varphi^t(\hat{p})$$

である。ところが (a) 式が成立しているから、 $\hat{x}^t \in \bar{X}^t$  である。

このとき、 $\hat{p} \geq 0$  と仮定し、ある  $j$  について、 $\hat{p}_j = 0$  とする。そして  $\hat{x}^i$  の第  $j$  成分を  $h_j^i$  (前述の  $h^i > a^i + md$ ,  $h^i > x$  の第  $j$  成分) にかえたベクトルを  $x^i$  とすれば、 $x^i \in E_i$ ,  $x^i \geq \hat{x}^i$  である。世方  $\sum \hat{x}^i = \sum a^i + \sum \bar{y}^k$  が成立するから、 $\hat{x}^i \in \bar{X}_i$  である。 $h^i > x$  (任意の  $x \in \bar{X}_i$  に対して) により、 $x_i$  の第  $j$  成分  $h_j^i$  は、 $\hat{x}^i$  の第  $j$  の成分より大となり、 $x^i \geq \hat{x}^i$ 。したがって  $u_i(x^i) > u_i(\hat{x}^i)$ 。しかも  $\hat{p}_j = 0$ , かつ  $x^i$ ,  $\hat{x}^i$  の  $j$  以外の成分は等しいから、 $(p, x^i) =$



$(\hat{p}, \hat{x}^i)$  となって、 $\hat{x}^i$  も予算制約式を満足する。これは  $\hat{x}^i \in \varphi^i(\hat{p})$  の意味に矛盾する。

ゆえに  $\hat{p} > 0$  でなければならない。したがってまた、任意の  $i$  について、 $\hat{p} \in S_n^i$  となり、 $\tilde{\varphi}^i(\hat{p}) = \varphi^i(p)$  がなりたち  $\tilde{x} = x(p) = x(p)$  も成立する。

さらに、 $\tilde{\varphi}^i(p)$  の任意の点  $x^i$  について、予算制約式が等号で成立していたから

$$(\hat{p}, \hat{u}) = 0$$

となり、これと、前述の  $\hat{p} > 0$ 、および  $\hat{u} \geq 0$  から、 $\hat{u} = 0$  がえられる。

こうして抽象モデルにおける均衡解の存在が証明されたこととなる。

#### 〔註〕

- 1) 以下の議論では、若干の数字的概念の理解が必要であるが、最も基礎的なものが集合である。集合とはある性質をもった“もの”の集りと規定される。“もの”  $x$  についての条件を  $P(x), Q(x) \dots$  とするとき、これらの条件をみたす“もの”が作る集会  $A$  を記号  $A = \{x \mid P(x), Q(x), \dots\}$  であらわす。たとえば“地球上に住んでいる全ての人間”という集合は  $A = \{x \mid x \text{ は地球上に住む; } x \text{ は人間である}\}$  となる。

(i) 集合という集団を構成する“もの”を元または要素という。要素の個数が有限のとき有限集合、無限のとき無限集合という。 $x$  が集合  $A$  の要素であるとき、“ $A$  は  $x$  を含む”といい、 $x \in A$  または  $A \supset x$  とかく。

(ii) 相等：2つの集合  $A, B$  は、全く同じ要素から成りたっているときひとしいといい、 $A = B$  とかく。

包含関係： $x \in A$  ならば  $x \in B$  であるとき、“ $A$  は  $B$  の部分集合” “ $A$  は  $B$  に含まれる”といい  $A \subset B$  または  $B \supset A$  とかく。

共通部分： $A, B$  に共通に含まれている要素の集りを“ $A$  と  $B$  の共通部分、共通集合”といい  $A \cap B$  とかく。 $A, B$  に共通な要素がないとき  $A \cap B$  は無意味な記号ともいえるが、空集合という特別の集合（ $\phi$  とかく）を考えて  $A \cap B = \phi$  とかく、 $n$  個の集合の共通部分は  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  または  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  とかく。

和集合： $A$  か  $B$  のうち、少くとも一方には含まれるような要素の集合で、 $A \cup B$  とかく。〔集合  $A, B$  を定める性質を  $P(x), Q(x)$  とすれば、 $A \cap B = \{x \mid P(x) \text{ and } Q(x)\}$ ,  $A \cup B = \{x \mid P(x) \text{ or } Q(x)\}$  である。

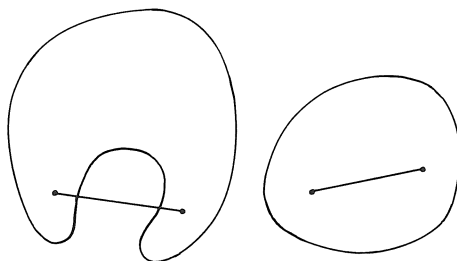
補集合： $B$  を  $A$  の部分集合とすると、 $A$  の要素で  $B$  に含まれない要素の全

体は1つの集合を作るが、これを“ $B$ の  $A$  における補集合”という。

2) 集合の構造の問題を概観する。

(i)  $X$  を  $R^n$  の1つの集合とし、 $X$  の点  $x^v$  から成る点列  $\{x^v\}$  を考える。いかなる点列  $\{x^v\}$  を選んでも  $X$  外の点に収束しないとき、換言すれば  $\lim_{v \rightarrow \infty} x^v$  という極限算法が  $X$  内で完結するとき、 $X$  を閉集合という。 $R^n$  の集合  $X$  の ( $R^n$  における) 補集合  $X^i$  が閉集合であるとき、 $X$  を開集合という。

(ii)  $R^n$  の集合  $X$  は必ずしも閉集合とは限らない。そこで  $X$  にいくつかの、しかしできるだけ少い個数の点を加えて、 $X$  をふくらませて閉集合にすることを考える。 $X$  を含む最小の閉集合を  $X$  の閉包といい  $\bar{X}$  とかく。



非凸

凸

図 14

(iii) (イ)  $R^n$  の2点  $x, y$  を端点とする線分は、 $\alpha x + \beta y$ :  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$  によって表示される点の集合であり、線分  $[x, y]$  の個々の点を  $x$  と  $y$  の凸結合という。 $R^n$  の部分集合  $X$  は、“ $X$  の任意の2点を端点とする線分  $[x, y]$  が、必ず  $X$  に含まれる”という性質をもつとき、凸集合という [( $\alpha$ ) 連立不等式  $f\lambda(x) \geq 0$  の解集合  $X = \{x \mid f\lambda(x) \geq 0, \lambda \in A\}$  は凸集合 ( $\beta$ ) 特殊なケースとして  $R^n$  の非負のベクトルの全体すなわち正象限  $R_+^n = \{x \mid x \in R^n, x \geq 0\}$  は凸集合 ( $\gamma$ ) 空集合  $\phi$  も凸集合とする]

(ロ)  $R^n$  の集合  $X$  が凸でなければ、前述の開集合の場合と同様に、できるだけ少い点をつけ加えてふくらまし、凸集合にすることを考える。 $X$  を含む凸集合の全てを  $X_\lambda (\lambda \in A)$  とすれば、 $C(X) = \bigcap_{\lambda \in A} X_\lambda$  は、 $X$  を含む最小の凸集合であって、 $X$  の凸包  $C(X)$  という。別の表現では、 $C(X)$  は  $X$  の任意有限個の点の凸結合を全部集めて作った集合である。すなわち  $C(X) = \{\sum_{i=1}^s \alpha_i x^i \mid x^i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1\}$  [ただし  $C(X)$  の表現における  $x^i$  の数は、 $X \subset R^n$  ならば、ただだか  $n+1$  個でよい。]

(ハ) 凸集合の特殊なものとして凸錐がある。 $R^n$  の部分集合  $K \neq \phi$  が、条件

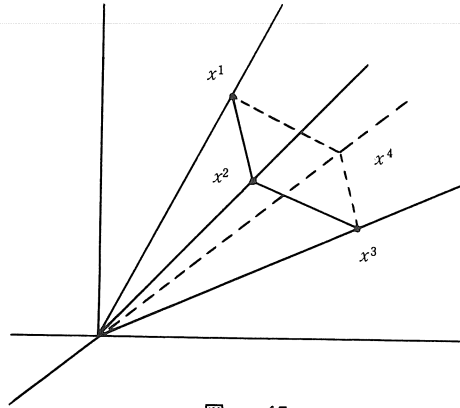


図 15

( $\alpha$ )  $x, y \in K$  ならば  $x+y \in K$ , ( $\beta$ )  $\alpha \geq 0, x \in K$  ならば  $\alpha x \in K$  をみたすとき、凸錐という。とくに  $R^n$  の部分集合  $X \neq \emptyset$  を含む最小の凸錐を  $X$  の張る凸錐  $K(X)$  といひ  $K(X) = \{\sum \alpha_i x^i \mid x^i \in X, \alpha_i \geq 0\}$  とかく〔前述の凸包  $C(X)$  から、 $\sum \alpha_i = 1$  を除いたものである〕 $X$  がとくに有限集合  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  のとき、 $K(X)$  を凸多面錐といひ、 $K(x^1, x^2, x^n)$  とかく。たとえば  $R^n_+$  は  $K(e^1, e^2, \dots, e^n)$  である。〔 $e^i$  は単位ベクトル〕

(二)  $R^n$  の部分集合  $L$  は、 $L \ni x, y$  ならば、 $\alpha x + \beta y \in L$  (任意の  $\alpha, \beta$  に対して) となるとき、線型部分空間といわれ、また  $L \ni x, y$  ならば  $\alpha x + \beta y \in L$  (任意の実数  $\alpha, \beta, \alpha + \beta = 1$  に対して) となるときアフィン部分空間といわれ、ともに凸集合であり、線型部分空間は、アフィン部分空間の特殊なもので、原点を通る。

(ホ) 1 次関数  $f(x) = \sum_{f=1}^n a_f x_f + b: R^n \rightarrow R$  で定義される集合  $L = \{x \mid f(x) = 0\}$  は超平面といわれ、アフィン空間であって、 $R^2$  における直線、 $R^3$  における平面に相当する。超平面によって  $R^n$  は、2つの凸集合  $X_+ = \{x \mid f(x) \geq 0\}$ ,  $X_- = \{x \mid f(x) \leq 0\}$  に分かれる。これらは半空間といわれ、 $X_+$  と  $X_-$  の共通部分がもとの超平面である。

- 3) 2つの実数  $\alpha, \beta$  に対して  $\alpha \geq \beta$  または  $\alpha \leq \beta$  のうち、少くとも一方の関係が必ず成立する。しかし  $x, y \in R^n$  ( $n \geq 2$ ) に対しては、一方が必ず成立するわけではない。たとえば  $x = (1, -1), y = (-1, 2)$  とすれば、 $x \geq y$  も  $x \leq y$  もともに成立しない。実数は、大小関係にしたがって一直線に並んでいうがベクトルや行列に導入された上述の順序の意味では、どのような二元もつねに比較できるわ

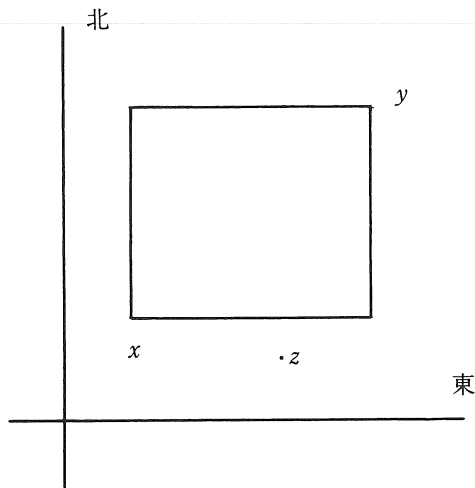


図 16

けではなく、特殊な関係にある2元の間にのみ比較可能なのである。このような順序の概念は、正しくは半順序関係というべきである。 $n=2$ の場合  $x \leq y$  は図のようになる。 $x$  と  $y$  は比較できない。判定のため2つの定理がある。

(イ)  $R^n \supset x, y$  とする。 $x \geq y$  であるための必要十分条件は、 $(x, u) \geq (y, u)$  (任意の  $u \geq 0, u \in R^n$  に対して) が成立することである。

(ロ)  $A, B$  を2つの  $n$  次正行行列とする、 $A \geq B$  であるための必要十分条件は、 $Au \geq Bu$  (任意の  $u \geq 0, u \in R$  に対して) が成立することである。

4)  $X$  を  $R^n$  の凸集合とする。関数  $\varphi: X \rightarrow R$  は、つぎの条件をみたすとき凸関数といわれる。すなわち  $\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$  (任意の  $x, y \in X, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$  に対して)。また  $-\varphi(x)$  が凸関数にあるとき、 $\varphi(x)$  を凹関数という。

5)  $R^n$  の  $k+1$  個の点  $x^i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, k$ ) が独立であるというのは、 $\sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = 0$  および  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$  から、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  が従うことにほかならず、また  $R^n$  の点  $x^i$  ( $i=0, \dots, k$ ) が独立であるための必要十分条件は、 $k$  個の点  $(x^i - x^0)$  が独立であることである。そして  $x^i$  ( $i=0, \dots, k$ ) が  $R^n$  内の独立な点の組であれば、 $k \leq n$  である。

(ロ)  $(k+1)$  個の点  $x^i \in R^n$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) から成る有限集合  $X$  の凸包  $C(X)$  を、頂点  $x^0, x^1, \dots, x^k$  の張る  $k$  次元単体といい、 $\overline{x^0, x^1, \dots, x^k}$  とかく。

したがって単体は、 $\sum_{i=0}^k \alpha_i x^i$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$  の形の点全体である。〔たとえば一点  $x^0$ , 二点  $x^0, x^1$  を端点とする線分, 三点  $x^0, x^1, x^2$  を頂点とする三角形, 四点  $x^0, x^1, x^2, x^3$  を頂点とする四面体は, それぞれ 0, 1, 2, 3 次元の単体である〕 $k$  次元単体は, その一般次元の拡張である。

(ハ) 集合  $S_n = \{x \mid x \geq 0, \sum_{j=0}^n x_j = 1\}$  は, (とくにそれにコンパクト性において) 経済学において重要な役割をもつが, この集合は  $R^n$  の  $n$  個の単位ベクトル  $e^i$  (第  $i$  成分が 1, そのほかの成分が 0 に等しいベクトルを頂点とする  $(n-1)$  次元単体  $\overline{e^1 e^2 \cdots e^n}$  である。

(ニ) 異なる 2 点  $x^0, x^1$  を通る直線は,  $\alpha$  を実数のパラメーターとして,  $x = x^0 + \alpha(x^1 - x^0)$  と表示されるが, これは,  $x = (1-\alpha)x^0 + \alpha x^1$  とかきかえられる。すなわちこの直線は,  $x = \alpha^0 x^0 + \alpha_1 x^1$ ,  $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$  で表示される。単体  $\overline{x^0 x^1}$  は, この直線上の点のうち, パラメーターの値が, 非負  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0$  となるものの全体の集合である。これを一般化して  $(k+1)$  個の独立な点  $x^i$  ( $i=0, \dots, k$ ) によって定まる  $k$  次元平面は,  $x = x^0 + \sum_{i=0}^k (x^i - x^0) \alpha_i$ ,  $i, e, x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i$ ,  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$  と表示され, 単体  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$  を含む。この平面を単体  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$  で定まる  $k$  次元平面という。

(ホ)  $\sigma(y^i) \neq \sigma(y^j)$  ( $i \neq j$ ) のとき, 小単体  $S' = \overline{y^0 y^1 \cdots y^k}$  を正則小単体といい, 同じく  $\sigma(z^i) \neq \sigma(z^j)$  ( $i \neq j$ ) のとき  $(k-1)$  次元小単体  $T' = \overline{z^0 z^1 \cdots z^{k-1}}$  を正則小辺単体とよぶ。

- 6)  $X$  を開集合,  $X^c$  をその補集合とすれば,  $a \in X$  の点  $a$  と  $X^c$  との距離  $d(a, X^c) = \inf_{x \in X^c} d(a, x)$  は  $> 0$  である。そこで正数  $\varepsilon > 0$  を,  $\varepsilon < d(a, X^c)$  が成立するように十分小さくとる。 $a$  を中心とし, 半径が  $\varepsilon$  である球の内部  $\cup(a, \varepsilon) = \{x \mid d(a, x) < \varepsilon\}$  は, 1 つの集合であるが, この集合の各点  $x$  は,  $a$  との距離が  $d(a, x^c)$  より小さいから,  $x \in X^c$ , したがって  $x \in X$  である。すなわち  $\cup(a, \varepsilon) \subset X$ 。すなわち  $X$  が開集合ならば, 各点  $a$  を中心とする十分小さい半径の球の内部が完全に  $X$  に含まれることとなる。このとき  $\cup(a, \varepsilon) = \{x \mid d(a, x) < \varepsilon\}$  を,  $a$  の  $\varepsilon$  球近傍という。

- 7) 行列式  $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$  に対し,  $b_{11}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$  等を首座小行列式と定義する。

- 8) 2 つの点対集合写像  $x \rightarrow f(x): X \rightarrow Y$  と,  $x \rightarrow g(x): \bar{X} \rightarrow Y$  ( $Y$  はコンパクト) において,  $X \subset \bar{X}$  であって,  $x \in X$  に対しては,  $f(x) = g(x)$  となるとき,  $g$  は

$f$ の拡張であるといわれる。ここではとくに、閉写像の拡張を考える。

点对集合写像  $f: x \rightarrow y$  が閉であることは、グラフ  $G_f$  が閉集合であることによって定義される。逆に直積空間  $X \times Y$  の一つの閉集合  $G$  が与えられ、任意の  $x$  に対して、 $(x, y) \in G$  となるような  $y \in Y$  が必ず存在すれば、 $X$  から  $Y$  への点对集合写像  $f(x) = \{y \mid y \leftarrow Y, (x, y) \leftarrow G\} \neq \emptyset$  が定義され、このとき、 $f$  のグラフがちょうど  $G$  になるから、 $f$  は閉写像になる。この方法を利用して、写像の閉拡張を行うことができる。

$X$  が  $\bar{X}$  の部分集合で、その閉包が  $\bar{X}$  に一致して、 $\bar{X} = \bar{X}$  となるとき、 $X$  は  $\bar{X}$  において稠密であるという。

(a)  $f: X \rightarrow Y$  ( $Y$  はコンパクト) が閉点对集合写像で、さらに  $X$  が  $\bar{X}$  において稠密であれば、 $f$  を、 $\bar{X}$  から  $Y$  への閉写像  $g(g(x) \neq \emptyset)$  に拡張することができる。

(証明)  $f$  のグラフ  $G_f$  は、 $X \times Y$  において閉集合であるが、 $\bar{X} \times Y$  においては、必ずしも閉集合ではない。そこでその閉包  $\bar{G}_f$  をとれば、 $\bar{G}_f$  は、 $\bar{X} \times Y$  の閉集合である。ところで、 $X$  は  $\bar{X}$  において稠密であるから、任意の  $x \in \bar{X}$  に対して、 $x^\nu \in X$  で、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x$  となる点列  $\{x^\nu\}$  をとることができる。 $f(x^\nu)$  から1点  $y^\nu$  を選べば、 $Y$  がコンパクトであるから、 $y^\nu \rightarrow y \in Y (\nu \rightarrow \infty)$  と仮定してよい。したがって  $(x^\nu, y^\nu) \in G_f$  かつ  $(x^\nu, y^\nu) \rightarrow (x, y)$  ( $\bar{X} \times X$  内で) となるから、 $(x, y) \in G_f$ 。したがって前述のごとく、閉写像  $g(x) = \{y \mid y \in Y, (x, y) \in \bar{G}_f\}$  が定義される。

つぎにこれが  $f$  の拡張であることがわかる。 $x \in X, y \in f(x)$  ならば  $(x, y) \in G_f \subset \bar{G}_f$  であるから、 $f(x) \subset g(x)$ 、他方  $g(x) \subset f(x)$  も成立する。実際  $y \in g(x)$  とすれば、 $(x, y) \in \bar{G}_f$ 、したがって  $G_f$  の点列  $(x^\nu, y^\nu)$  が存在して、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (x^\nu, y^\nu) = (x, y)$  となるはずであるが、 $(x, y) \in X \times Y$ 、かつ  $G_f$  は  $X \times Y$  の閉集合であるから、 $(x, y) \in G_f$  でなければならない。ゆえに  $y \in f(x)$ 、すなわち  $g(x) \subset f(x)$  が成立する。以上によって、 $X$  上で  $f(x) = g(x)$  となる。

(b)  $f: X \rightarrow Y$  を閉写像、 $Y$  を  $R^n$  のコンパクト凸集合とする。このとき、各  $x \in X$  に、 $f(x)$  の凸包  $C(f(x))$  を対応させる写像も閉である。

(証明)  $C(f(x))$  の点は、たかだか  $(n+1)$  個の  $f(x)$  の点の凸結合である。そこで  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x, \lim_{\nu \rightarrow \infty} z^\nu = z, z \in C(f(x))$  とすると、ある  $y^{s\nu} \in f(x^\nu)$ 、係数  $\lambda_{s\nu}$  に対して

$$(a) \quad z^\nu = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_{s\nu} y^{s\nu}, \quad \lambda_{s\nu} \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_{s\nu} = 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

である。ところが  $y^{s\nu} \in Y, (\lambda_{1\nu}, \dots, \lambda_{n+1,\nu}) \in S_{n+1}$  であり、 $Y$  と  $S_{n+1}$  がともにコンパクトであるから、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\lambda_{1\nu}, \dots, \lambda_{n+1,\nu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in S_{n+1}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} y^{s\nu} = y^s \in Y \quad (s=1, \dots, n+1)$$

と仮定できる。そうすると、 $f$ は閉であり、 $y^{s\nu} \in f(x^\nu)$  となっているから、 $y^s \in f(x)$  である。このことを考慮して、(a) 式において、 $\nu \rightarrow \infty$  ならしめると、

$$z = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s y^s, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s = 1$$

となるから、 $z \in C(f(x))$  である。すなわち  $x \rightarrow C(f(x))$  は閉である。