

一般可能性定理のゲーム理論的 構造の再検討

—Wilson R. の再検討—

佐々木 正 廣

序

I. Wilson の諸論

II. Wilson の再検討

結 論

序

社会的選好順序を決定する集合的意思決定の問題については、K. J. Arrow [1] によって、集合的意思決定の合理的で、かつ民主的なルールの不存在を証明した一般可能性定理が証明されて以来、この定理をめぐる多くの議論がなされてきた。

Suzumura [3] によれば、この Arrow 問題に関して、三方向の研究がなされてきた。すなわち、

- (a) Arrow の条件を弱め、彼の困難性を抜け出る試み
- (b) 集合的選択理論における他のパラドックスを提案する
- (c) Arrow の定理とパレート厚生経済学の理論の関連についての疑問をはらす

という三方向である。また、その中では、Arrow の諸条件を検討し、それらの条件をどのように弱めれば、あるいは変更すれば、集合的選択ルールの存在が証明できるのかという問題、Bergson-Samuelson 理論を検討し、SWO、すなわ

ち社会的厚生順序の存在が論じられている。

本論文では、Arrow の一般可能性定理をゲーム理論とのかかわりで検討している、Wilson [2] の再検討を試みる。特に、その中でも、最も重要な役割を果たしていると思われる定理 2 を検討してみたものである。

I. Wilson の諸論

Robert Wilson は、[2] において、Arrow の一般可能性定理をゲーム理論の観点から考察している。すなわち、Arrow が認めた、社会的厚生関数から導かれる社会的選好関係と、協力ゲームとしての投票過程モデルから導かれる支配関係の関連を、厳密に確立することを目的としている。

ここで、Wilson [2] を簡単に要約しておく。

まず、その中で使用されている、いくつかの記号及び定義を示しておく。

記号

N ; 個人の有限集合

S ; 少なくとも 3 個以上の異なる要素を含む任意の社会状態の集合

$\pi = (R_i)_{i \in N}$; 各個人 $i \in N$ に対して、 S 上で定義された、完全性・推移性を満たす選好関係 R_i からなる個人の選好状態

Π ; すべての可能な選好状態の集合

F ; 社会的厚生関数

定義

連合 (coalition); 個人の非空集合

$xR_C y$; もし、 C が連合であり、 x, y が社会状態であれば、任意の個人 $i \in C$ に対して、 $xR_i y$, すなわち連合 C は満場一致で、 y より x を選好することを意味する。

$xP_C y$; もし、 C が連合であり、 x, y が社会状態であれば、任意の個人 $i \in C$ に対して、 $xP_i y$ ⁽¹⁾, すなわち連合 C は満場一致で、 y より x を強意に選好することを意味する。

$R=F(\pi)^{(2)}$; 選好状態 $\pi=(R_i)_{i \in N}$ に対する社会的選好関係。

これらの記号・定義に加え, Arrow が提示した公理及び条件を示している。

公理 I ; 各選好状態に対し, 対応する社会的選好関係は完全性を満たす。

すなわち,

$$\forall \pi \in \Pi, \forall x, y \in S \text{ に対して,}$$

$$x \bar{R} y \rightarrow y R x。$$

同等に, 対応する社会的強選好関係は, 反対称 (asymmetric) である。

すなわち,

$$x P y \rightarrow y \bar{P} x。$$

公理 II ; 各選好状態に対し, 対応する社会的選好関係は, パレート推移性

を満たす。すなわち,

$$\forall \pi \in \Pi, \forall x, y, z \in S \text{ に対して,}$$

$$x R y \text{ かつ } y P_N z \rightarrow x P z。$$

同時に,

$$y P_N z \rightarrow x P z, \text{ あるいは } y P x。$$

この公理 II は, $x P_c y$ の定義を考慮すればわかるように, 任意の x, y, z に対して, 社会的に y より x が選好され, かつ, すべての個人が z より y を選好すれば, その時, x は社会的に z より選好されることを示している。

公理 III ; もし, 2つの選好状態が社会状態の部分集合について同意するならば, その時, 2つの対応する社会的選好関係は, その部分集合について同意する。

これら3つの公理は, 社会的厚生関数と整合的であると述べている。

次に, 上述の記号・定義を用いて, 勝利連合 (winning coalition) と妨害連

合 (blocking coalition) をさらに定義し、これらの概念を利用して、定理 1 においては、妨害連合が空集合ではないことを証明している。また、定理 2 では、勝利連合と妨害連合が同値関係であることを示し、定理 3 で、妨害連合が Arrow の一般可能性定理を立証するに十分な勝利連合であることを証明している。

ここで、まず、勝利連合と妨害連合の定義を示しておく。

定義

勝利連合；すべての選好状態と、すべての社会状態の対 x, y に対して、
もし連合のメンバーが満場一致で y より x を強意に選好するなら、社会は y より x を強意に選好する場合、その連合は勝利連合である。
すなわち、

$$\forall \pi \in \Pi, \forall x, y \in S \text{ に対して,}$$

$$xP_{\pi} y \rightarrow xP y \quad \Leftrightarrow C \text{ は勝利連合。}$$

妨害連合；ある選好状態と、ある社会状態の対 x, y に対して、社会が y より x を選好し、かつ連合が満場一致で y より x を選好する最大の連合である場合、その連合は妨害連合である。すなわち、

$$\exists \pi \in \Pi, \exists x, y \in S \text{ に対して,}$$

$$xRy, \text{ かつ } C = \{i \in N \mid xR_i y\} \Leftrightarrow C \text{ は妨害連合。}$$

これらの定義から、補助定理 1 が導かれる。

補助定理 1

もし、 π が選好状態であり、かつ x と y は xRy となる社会状態であれば、その時、 $C = \{i \in N \mid xR_i y\}$ は妨害連合である。

証明；もし、 C が空集合であれば、 $x \neq y$ 、かつ $\forall i \in N$ に対し、 $yP_i x$ であり、したがって、 Π で示されるパレート原理は yPx 、あるいは同時に $x\bar{R}y$ をもたらす。これは仮設に矛盾する。

この補助定理 1 の意義は、妨害連合が空集合でないということである。同様に、系 1.1 で、補助定理 1 の xRy が強意の選好の場合、すなわち xPy である場合でも、妨害連合 C は空集合でないことを証明している。

系 1.1

もし、 π が選好状態であり、かつ x と y が xPy となる社会状態であれば、その時、 $C = \{i \in N \mid xR_i y\}$ は妨害連合である。

証明；I に従い、 $xPy \rightarrow y\bar{P}x \Leftrightarrow xRy$ 。

定理 2

もし、ある連合が妨害連合ならば、その時に限り勝利連合である。

定理 2 については、次章で検討する。

系 2.1

もし、連合がすべての勝利連合と相交わるならば、その時に限り、その連合は勝利連合である。

証明；2 つの勝利連合 c と d は、必ず共通集合をもつ。なぜなら、もしそれらが存在すれば、ある社会状態の対 x と y に対して、 $xP_c y$ かつ $yP_d x$ となる選好状態 π は xPy と yPx の両方を結果し、I に矛盾する。他方、もし C がすべての勝利連合と相交わる連合であるならば、したがって定理 2 により、すべての妨害連合と相交わるならば、その時、 $xP_c y$ となる任意の社会状態の対 x と y 、および任意の選好状態 π に対して、 $yP_b x$ はすべての妨害連合 b に対して誤りということになる。故に、補助定理 1 により、 yRx は成立せず、従って xPy となる。故に C は勝利連合である。

系 2.2

$$(a) (\forall x, y \in S)(\forall \pi \in \Pi) xRy \rightarrow (\exists c \in W) xR_c y;$$

(b) $(\forall x, y \in S)(\forall \pi \in \Pi) xRy \rightarrow (\exists c \in W) xR_c y;$

(c) $(\forall x, y \in S)(\forall \pi \in \Pi(x, y)) xPy \leftrightarrow (\forall c \in W) xP_c y.$

証明；(a) と (b) は，補助定理 1 と系 1. 1 の各々と定理 2 から導かれる。(c) の逆は勝利連合の定義から導かれ，順は (b) と $\Pi(x, y)$ の定義から導かれる。

ただし，ここで $\Pi(x, y)$ は，社会状態 x と y の間で無差別となる個人がいないすべての選好状態の集合である。すなわち， $\Pi(x, y) = \{\pi \in \Pi \mid (\forall i \in N) xP_i y \text{ あるいは } yP_i x\}$ である。また， W は勝利連合の集合（族）である。

定理 3 (Arrow)

ある個人が勝利連合を構成するか⁽³⁾，あるいは，対応する強かつ弱の社会的選好関係が循環的でかつ非推移的選好状態が存在する。

証明；I により，任意の選好状態に対し， xRx ，従って， N は妨害連合であり，それ故，また勝利連合である⁽⁴⁾。 e を最少勝利連合とする。 e が 1 人以上の個人を含むとすれば， N を部分集合 b, c, d に分割でき，それに対し， b と c はその連合が e である連合である。 x, y および z を異なる選好状態とし， π を $xP_b yP_b z, zP_c xP_c y$ である選好状態とすると，もし d が空集合でないならば， $yP_d xP_d x$ である。 e が勝利連合であるから， $xP_e y$ ，したがって xPy である。もし zPy が真であるならば，その時， c は妨害連合であり，従って勝利連合であり， yPz となる。同様に，もし xPz が真ならば，その時， b は勝利連合であり，従って zPx となる。故に P は $\{x, y, z\}$ について循環的である。また， zPx は，I により $x\bar{P}z$ を意味し，従って P は非推移的である。さらに，I より， R は循環的で，かつ非推移的である。

次に、単純ゲームの性質について述べている。すなわち、John von Neuman, Oscar Morgenstern 等によって主張された協力的ゲームの理論において、もし勝利連合が満場一致で、2 番目より最初のものを強意に選好するならば、その時に限り、ある社会状態が他の社会状態より優位を占めるような、勝利連合群と呼ばれる集合の集合が存在する場合に単純ゲームと呼ぶ。もし、すべての勝利連合がすべての他の勝利連合と交わるならば、その時に限り、単純ゲームは固有 (proper) と呼ばれ、2 つの社会状態は互いに決して優位を占めない。また、もし、すべての勝利連合と交わる連合がそれ自身勝利連合であれば、その時に限り、単純ゲームは強い (strong) と呼ばれる。

これらのことから、系 2.1 は、Arrow の社会選択理論の勝利連合は強い固有 (strong-proper) 単純ゲームの勝利連合のための条件に適合していることを確立した。また、系 2.2 の (c) では、2 つの社会状態の間で無差別な個人がいない選好状態に対し、社会的強選好関係と優越関係を等しくし得るし、それにより、強い固有単純ゲームのような選好状態に対して、社会的厚生関数の結果を確認し得ることを示す。

最後に、単峰型の選好状態⁽⁵⁾について論じている。Arrow によって定義されたように、任意の 3 つの異なる社会状態 $x, y, z \in S$ と任意の個人 $i \in N$ に対し、もし、 $x \succ y \succ z$ か、あるいは $z \succ y \succ x$ 、かつ $x R_i y$ であるならば、その時、 $x P_i z$ となるような S の強順序 \succ が存在するならば、その時に限り、ある選好状態 $\pi = (R_i)_{i \in N}$ は単峰型であると言われる。この単峰型の選好状態に関して次の定理 4 を示している。

定理 4

任意の単峰型の個人選好状態に対して、対応する社会的選好関係は推移的である。

証明；まず、 $\pi = (R_i)_{i \in N}$ を単峰型の個人選好状態であるとする。ある $x, y, z \in S$ に対して、 $x R y R z$ となると仮定する。もし、 x, y, z が全部は異ならないならば、結論は $x R z$ と平凡である。故に、それから 3 つが

すべて異なると仮定する。また、 $b = \{i \in N \mid xR_i y\}$ とすると、 b は妨害連合であり、したがって勝利連合である。同様に、 $c = \{i \in N \mid yR_i z\}$ も勝利連合である。もし $x > y > z$, あるいは $z > y > x$ であるなら、 $xR_b y$ は $xP_b z$ を意味し、したがって、 b が勝利連合であるから、 xP_z かつ xR_z を得る。同様に、もし $y > z > x$, あるいは $x > z > y$ であれば、 $yR_c x$ より、 $yP_c x$ を得、それ故、 yP_x となる。これは xR_y を否定するので、この状態は得られない。 $>$ は強順序であり、残された可能性は、 $y > x > z$, あるいは $z > x > y$ である。もし xR_z が成立しないとすれば、 zPx であり、 zRx となる。故に、 $d = \{i \in N \mid zR_i x\}$ は妨害連合であり、したがって勝利連合である。また、 $zR_d x$ より、 $zP_d y$ であり、 zPy となる。これは、 yR_z と矛盾する。したがって、 xR_z となる。

以上のように、Wilson は4つの定理といくつかの系を示している。

II. Wilson の再検討

Wilson [2] は、上述のような諸々の記号・定義のもとで、その論文で最も重要な役割を果たしていると思われる定理、すなわち勝利連合と妨害連合の同値性を証明している。その定理の中で、「連合が勝利連合ならば、その連合は妨害連合である」という命題について、彼は次のように証明している。

証明； C を勝利連合とすれば、任意の $\pi \in \Pi$, 任意の $x, y \in S$ に対して、 $xP_c y \rightarrow xPy$ となる。ここで、 $xP_c y$ の定義より、任意の個人 $i \in C$ に対し、 $xP_i y$ なので、任意の $i \in N$ に対して、 $xR_i y$ となる。したがって $C = \{i \in C \subset N \mid xR_i y\}$ となる。また、その時 $xP_c y$ より、 $xPy \rightarrow xRy$ 。故に、ある $\pi \in \Pi$, ある $x, y \in S$ に対して、 xRy かつ $C = \{i \in N \mid xR_i y\}$ となる。

次に逆の証明, すなわち「もし連合が妨害連合であるならば, その時, その連合は勝利連合である。」という命題については, 次のように証明されている。

証明; 社会状態の集合 S が少なくとも5つの異なる要素を含む場合についてのみ証明する。もし C が妨害連合ならば, その時, xRy かつ $C = \{i \in N \mid xR_i y\}$ となる選好状態 π と社会状態 x, y が存在する。もし S が少なくとも5つの要素を持つならば, x や y と異なり, かつ互いに異なる社会状態 w と z が存在することになる。 π' を $wP_c' z$ となる任意の選好状態であるとする。その時, $\{x, y\}$ については π に同意し, $\{w, z\}$ に関しては π' と同意する選好状態 π'' が存在し, それらに対して, $wP_N'' x$ かつ $yP_N'' z$ となる。 π'' は $\{x, y\}$ については, π に同意するので, III より, $xR'' y$ となる。さらに $xR'' y$ かつ $yP_N'' z$ は, II により $xP'' z$ を意味する。もし $wP'' z$ が成立しないとすると, その時, $zR'' w$ となり $wP_N'' x$ を考慮すれば, $zP'' x$ となる。これは I と矛盾し, 故に $wP'' z$ である。また, π'' は $\{w, z\}$ については π' と同意するので, III により, π' に対して $wP' z$ となる。したがって, x や y と異なる任意の w と z に対し, $(\forall \pi' \in \Pi) wP_c' z \rightarrow wP' z$ 。 $(\forall i \in C) wP_i''' z$ かつ $(\forall i \in C) zP_i''' w$ であるような選好状態 π''' が存在し, それに対し, $wP''' z$ となる。それ故, $wR''' z$ である。また, $C = \{i \in N \mid wR_i''' z\}$ 。従って, 上述の手続きで, x, y を w, z に, π を π''' に置き換えることができ, この手続きをさらに繰り返すことができる。この方法で, S は少なくとも5つの要素をもつので, $(\forall \pi \in \Pi) (\forall x, y \in S) xP_c y \rightarrow xPy$ 。したがって, C は勝利連合である。

しかしながら, 後者の命題, すなわち「 C が妨害連合 $\rightarrow C$ は勝利連合」については, 次のように必ずしも成立し得ないことが証明できる。すなわち,

ある $\pi \in \Pi$, ある $x, y \in S$ に対して,

xIy , かつ $C = \{i \in N \mid xP_i y\}$

となる連合 C を考えると,

xIy より xRy が導かれ, また, $xI_i y$ なる $i \in N$ が存在しないとすれば,

$C = \{i \in N \mid xP_i y\}$ は, $xP_i y \rightarrow xR_i y$ より,

$C = \{i \in N \mid xR_i y\}$ 。

したがって, C は妨害連合である。

ここで, C が勝利連合であると仮定し, 連合の定義を考慮すれば,

$xP_c y \rightarrow xPy$ 。

ところが, xIy なので, これは矛盾である。

故に, C は勝利連合ではない。

これにより, 定理 2 の「勝利連合 \rightarrow 妨害連合」の命題は利用できるが, 逆の命題は利用できないことになる。

結 論

前節で示したように, Wilson [2] で中心的役割を果たしている定理において, その必要性は認められるが, 逆の十分性は残念ながら疑わしいと言わざるを得ない。そうであれば, もちろん, 定理 2 の十分性の命題を利用して証明がなされている系 2. 2 の (a), (b), さらに, その (b) を利用している (C) も疑わしいことになる。また, 定理 3 (Arrow) の証明についても疑わざるを得ないという結論となる。最後の単峰型の選好状態について確立された定理 4 の証明にも, やはり定理 2 の十分性の命題が利用されている。しかしながら, 系 2. 1, すなわち「もし連合がすべての勝利連合と相交わるならば, その時に限り, その連合は勝利連合である」という必要十分条件については, この定理 2 の必要性の命題だけが利用されており, その十分性の命題は利用されていない。したがって, 「Arrow の社会選択理論の勝利連合は, 強い固有単純ゲームでの勝利連合に対する条件と合致していることを確立した。⁽⁶⁾」という事実

は評価されるべきである。

(注 記)

- (1) $xP_i y$ は, $y\bar{R}_i x$ であり, R_i 上の横棒は否定の意味を持つ。ただし, Wilson [2] では, $\sim yR_i x$ で表わしている。
- (2) $xPy \longleftrightarrow y\bar{R}x$ であり, x は y より社会的に強意に選好されることを意味する。
- (3) Arrow の独裁者の存在と同値である。
- (4) 全個人の集合 N が妨害連合であることは, 妨害連合の定義に $x=y$ を考慮することにより, また, N が勝利連合であることは, パレート原理により証明できることが Wilson によって示されている。従って, ここでは必ずしも定理 2 を利用する必要はない。
- (5) 単峰型の選好については, Black [4] で論じられている。Black によれば, 個人の選好状態が単峰型であり, 投票者が奇数である場合にのみ, いわゆる相対多数決の方法で確定的な結果が得られる。
- (6) Wilson [2]

参 考 文 献

- [1] Arrow, K. J., Social Choice and Individual Values (2nd ed.), [アロー, 『社会的選択と個人的評価』長名寛明訳, S52, 日本経済新聞社]
- [2] Wilson, R., "The Game-Theoretic Structure of Arrow's General Possibility Theorem", Journal of Economic Theory, 5 (1972), pp.14-20.
- [3] Suzumura, K., "Remarks on the Theory of Collective Choice", Economica, 43 (1976), pp.381-390.
- [4] Black, D., "On the Rationality of Group Decision-Making", Journal of Political Economy, 56 (1948), pp.23-34.