加法的関数方程式の解法について

飯　田　　博

1. は じ め に

本稿は，経済学部一般教養科目の数学で「関数の加法性」を関数方程式を用いて講義する際に作成した講義ノートを，初等超越関数の性質を利用して発展させたものである。

本題材に関することは，参考にした一般教養数学書の限りでは見当たらなかった。そこで本稿のような解説法を採用すれば，文科系の学生にも十分理解できる内容になり，文科系大学における数学教育の上で意義があるものになるのではなかろうかと考え，ここにこの小論を研究ノートとして紹介することにした次第である。

2. 初等的関数方程式

関数の加法について考察するために，次の4つの初等的関数方程式を用意する。

＜Ⅰ＞　$f(x+y)=f(x)+f(y)$

＜Ⅱ＞　$f(x+y)=f(x)f(y)$

＜Ⅲ＞　$f(x+y)=f(x)f(y)+K^2g(x)g(y)$

$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

＜Ⅳ＞　$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+K^2 f(x)f(y)}$

ただし，$f(x), g(x)$ は恒等的に定数ではない一価値数，K^2 は０ではない任意定数とする。

これら＜Ⅰ＞〜＜Ⅳ＞の加法的関数方程式に，まず C^1 級を仮定して，微分方程式に帰着させ積分法を用いて個別に解いてみる。次に，求める関数の連続性だけを仮定して，＜Ⅱ＞，＜Ⅲ＞，＜Ⅳ＞を＜Ⅰ＞に帰着させることにより代数的に解いてみる。以後，前者の解法を解法Ａ，後者の解法Ｂと呼ぶことにする。ただし，両解法とも＜Ⅲ＞，＜Ⅳ＞の関数形を検討する際に初等的超越関数を導入する。

3.　解　法　Ａ

＜Ⅰ＞　$f(x+y)=f(x)+f(y)$　　　………(1•1)

とおく

（1•1）の両辺を y について微分すると（x は任意定数とみて）

$$f'(x+y)=f'(y)$$

である。よって，$y=0$ とおくと，任意の x に対して

$$f'(x)=f(0)$$

ここで，$f'(0)=a$ とおくと

$$f'(x)=a$$

$\therefore \quad \int f'(x)dx = a\int dx$

$\therefore \quad f(x) = ax + C \qquad (C:$ 定数$)$

(1•1) において，$x=y=0$ とおくと $f(0)=0$ であるから $C=0$ である。

故に，(1•1) を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x) = ax \qquad (a: \text{任意定数})$$

となる。

<Ⅱ>　$f(x+y) = f(x)f(y)$　………(2•1)

とおく。

(2•1) の両辺を y について微分すると (x は任意定数とみて)

$$f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

よって，$y=0$ とおくと，任意の x に対して

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

ここで，$f'(0)=a$ とおくと

$$f'(x) = af(x)$$

$$\therefore \quad \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = a\int dx$$

$$\therefore \quad \log_e |f(x)| = ax + C_1 \qquad (C_1: \text{定数})$$

$$\therefore \quad f(x) = C_2 e^{ax} \qquad (C_2 = e^{C_2})$$

（1•2）において $y=0$ とおくと $f(x)=f(x)f(0)$。$f(x)\fallingdotseq \text{constant}$ であるから $f(0)=1$ である。よって $C_2=1$ である。

故に（1•2）を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x)=e^{ax} \qquad (a\text{: 任意定数})$$

である。

＜Ⅲ＞
$$f(x+y)=f(x)f(y)+K^2g(x)g(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 1)$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 2)$$

とおく。

$$F(x)=f(x)+Kg(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 3)$$
$$G(x)=f(x)-Kg(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 4)$$

とおくと

$$F(x+y)=f(x+y)+Kg(x+y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 5)$$
$$G(x+y)=f(x+y)-Kg(x+y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 6)$$

となる。(3•1)$+K\times$(3•2) より

$$f(x+y)+Kg(x+y)$$
$$=\{f(x)+Kg(x)\}\{f(y)+Kg(y)\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot 7)$$

故に，(3•3)～(3•6) より (3•7) は

$$F(x+y)=F(x)F(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot8)$$

(3･1)－K×(3･2) より，上記と同様にすると

$$G(x+y)=G(x)G(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot9)$$

$F(x)$, $G(x)$ は (3･3), (3･4) より共に C^1 級の関数であるから，(3･8), (3･9) の両辺を y について微分すると (x は任意定数)

$$F'(x+y)=F(x)F'(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot10)$$

$$G'(x+y)=G(x)G'(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot11)$$

よって，$y=0$ とおくと，任意の x に対して

$$F'(x)=F'(0)F(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot12)$$

$$G'(x)=G'(0)G(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot13)$$

ここで，$f'(0)=\lambda_1$，$g'(0)=\lambda_2$ とおくと，(3･3), (3･4) の両辺を x で微分した式から

$$F'(0)=\lambda_1+K\lambda_2$$

$$G'(0)=\lambda_1-K\lambda_2$$

である。故に，(3･12), (3･13) は

$$F'(x)=(\lambda_1+K\lambda_2)F(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot14)$$

$$G'(x)=(\lambda_1-K\lambda_2)G(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(3\cdot15)$$

(3·14), (3·15) において, $\lambda_1+K\lambda_2=0$, $\lambda_1-K\lambda_2=0$ とすると, $F'(x)=0$, $G'(x)=0$ となり, $F(x)$, $G(x)$ は恒等的に定数となり, $f(x)$, $g(x)$ も恒等的に定数になってしまい予盾する。よって

$$\lambda_1+K\lambda_2 \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3\cdot16)$$

$$\lambda_1-K\lambda_2 \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3\cdot17)$$

ここで, (3•14), (3•15) において $x=0$ とおくと

$$F'(0)=\lambda_1+K\lambda_2=(\lambda_1+K\lambda_2)F(0)$$

$$G'(0)=\lambda_1-K\lambda_2=(\lambda_1-K\lambda_2)G(0)$$

(3•16), (3•17) より

$$F(0)=G(0)=1 \qquad \cdots\cdots(3\cdot18)$$

微分方程式 (3•14), (3•15) を＜Ⅱ＞の解法と同様に解くと

$$F(x)=C_2e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}$$

$$G(x)=C_2e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}$$

(C_1, C_2: 定数)

ここで, $x=0$ とおくと, (3•18) より $C_1=C_2=1$

$$\therefore \quad F(x)=e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}$$

$$G(x)=e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}$$

(3•3), (3•4) より

$$f(x)+Kg(x)=e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}$$
$$f(x)-Kg(x)=e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}$$

故に，(3•1)，(3•2) を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}+e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}-e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}}{2K}$$

(λ_1, λ_2: 任意定数)

となる。

<Ⅳ>

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+K^2f(x)f(y)} \qquad \cdots\cdots\cdots(4•1)$$

とおく。

(4•1) の分母を払うと

$$f(x+y)\{1+K^2f(x)f(y)\}=f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(4•2)$$

(4•2) において，$y=0$ とおくと

$$f(x)\{1+K^2f(x)f(0)\}=f(x)+f(0)$$
$$\therefore\ f(0)\{K^2f(x)-1\}=0$$

$f(x)$ は定数でないから

$$f(0)=0 \qquad \cdots\cdots(4\cdot 3)$$

(4•2) の両辺を y について微分すると (x は任意定数とみて)

$$f'(x+y)\ \{1+K^2f(x)f(y)\}+K^2f(x+y)f(x)f'(y)=f'(y)$$

よって，$y=0$ とおくと，任意の x に対して

$$f'(x)\ \{1+K^2f(x)f(0)\}+K^2\{f(x)\}^2f'(0)=f'(0)$$

(4•3) より

$$f'(x)=[1-K^2\{f(x)\}^2]f'(0)$$

ここで，$f'(0)=a$ とおくと

$$f'(x)=a[1-K^2\{f(x)\}^2]$$

$$\therefore \quad \int\frac{d(f(x))}{\{1-Kf(x)\}\ \{1+Kf(x)\}}=a\int dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-Kf(x)}+\frac{1}{1+Kf(x)}\right)d(f(x))=a\int dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\log_e\left|\frac{1+Kf(x)}{1-Kf(x)}\right|=ax+C_1$$

(C_1: 定数)

$$\therefore \quad \frac{1+Kf(x)}{1-Kf(x)}=C_2e^{2ax} \qquad (C_2=\pm e^{2C_2})$$

ここで，$x=0$ とおくと（4•3）より

$$C_2=1$$

$$\therefore \quad \frac{1+Kf(x)}{1-Kf(x)}=e^{2ax}$$

故に，（4•1）を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{K}\cdot\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}} \qquad (a\text{: 任意定数})$$

となる。

3. 解　法　B

＜I＞　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ………(1−1)

とおく。

（1−1）において，$x=y$ とおくと $f(2x)=2f(x)$ となるから，一般に

$$f(nx)=nx(x) \qquad (n\text{: 任意の自然数}) \quad \cdots\cdots\cdots(1-2)$$

が成立する。

（証明）

• $n=1$ のとき明らかに成立する。

• $n=l$ のとき（1−2）が成立すると仮定する。つまり

$$f(lx)=lf(x) \quad \cdots\cdots\cdots(1-2)'$$

$n=l+1$ のとき

$$f((l+1)x)=f(lx+x)=f(lx)+f(x) \qquad (\because (1-1))$$
$$=lf(x)+f(x) \qquad (\because (1-2)')$$
$$=(l+1)f(x)$$

よって，(1−2) は真である。

一般に

$$f(nx)=nf(x) \qquad (n\text{: 任意の整数}) \qquad \cdots\cdots\cdots(1-3)$$

が成立する。

(証明)

(1−1) において $y=-x$ とおくと，$f(0)=0$ であったから

$$f(-x)=-f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(1-4)$$

よって，n を負の整数とするとき，$n=-m$ (m は自然数) とすると

$$f(nx)=f(-mx)=f(m(-x))$$
$$=mf(-x)=-mf(x) \qquad (\because (1-4))$$
$$=nf(x)$$

となり，(1−3) は真である。　□

一般に

$$f(px)=pf(x) \qquad (p\text{: 任意の有理数}) \qquad \cdots\cdots\cdots(1-5)$$

が成立する。

（証明）

$p=m/n$ (m, n は整数，　$n\neq 0$) とおくと

$$nf(px)=f(npx) \qquad (\because (1-3))$$
$$=f(mx)$$
$$=mf(x) \qquad (\because (1-3))$$

となる。

$$\therefore \quad f(px)=\frac{m}{n}f(x)=pf(x)$$

となり，（1－5）は真である。

上記の結果を利用して，$f(1)=a$ とおくと，x が有理数のとき

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax \qquad \cdots\cdots\cdots(1-6)$$

次に，x が無理数のとき，有理数の稠密性により

$$\lim_{n\to\infty} y_n=x$$

となる有理数の数列 $\{y_n\}$ を考えることができる。有理数 y_n について

$$f(y_n)=ay_n \qquad (\because (1-6))$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n)=a\lim_{n\to\infty} y_n$$
$$=ax \qquad \cdots\cdots\cdots(1-7)$$

さらに，$f(x)$ の連続性により

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=f(\lim_{n\to\infty} y_n)$$
$$=f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(1-8)$$

故に，(1－7)，(1－8) から，(1－1) を満たす関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して

$$f(x)=ax \qquad (a\text{: 任意定数})$$

である。

＜Ⅱ＞ $f(x+y)=f(x)f(y)$ ………(2－1)

とおく。

$f(x)$ がある区間内で負の値をとると仮定すると，この区間内で，$f(x+y)$，$f(x)$, $f(y)$ はいずれも負となり (2－1) の左辺は負，右辺は正となり矛盾する。よって，$f(x)$ は非負関数でなければならない。

$f(x)$ は非負関数であるから，(2－1) の両辺の対数がとれる。そこで，(2－1) の両辺の自然対数をとると。

$$log_e f(x+y)=log_e f(x)+log_e f(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(2-2)$$

となる。$log_e f(x)=F(x)$ とおくと，(2－2) は

$$F(x+y)=F(x)+F(y)$$

となり，前に掲げた＜Ｉ＞と同型の関数方程式になる。

$$\therefore \quad F(x)=ax$$

すなわち，$\log_e f(x)=ax$　となる。

故に，（2－1）を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x)=e^{ax} \qquad (a\text{: 任意定数})$$

となる。

＜Ⅲ＞
$$f(x+y)=f(x)f(y)+K^2g(x)g(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3-1)$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(3-2)$$

とおく。

3. における＜Ⅲ＞の解法と同様に

$$F(x)=f(x)+Kg(x)$$
$$G(x)=f(x)-Kg(x)$$

とおくと

$$F(x+y)=F(x)F(y)$$
$$G(x+y)=G(x)G(y)$$

という関数式が成立する。いずれも，前に掲げられた＜Ⅱ＞と同型の関数方程式になっているから

$$F(x)=f(x)+Kg(x)=e^{ax}$$
$$G(x)=f(x)-Kg(x)=e^{bx}$$

とおくことができる。

故に，(3－1)，(3－2) を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=\frac{e^{ax}+e^{bx}}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots(3-3)$$

$$g(x)=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{2K} \qquad \cdots\cdots\cdots(3-4)$$

(a, b: 任意定数)

となる。

K が純虚数であっても，$f(x)$, $g(x)$ の右辺は共に正則関数になっているから，$f(x)$, $g(x)$ は共に微分可能である。

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{ae^{ax}+be^{bx}}{2}$$

$$g'(x)=\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{2K}$$

となる。ここで，**3.** の解法Ａにおける<Ⅲ>の場合と同様に，$f'(0)=\lambda_1$, $g'(0)=\lambda_2$ とおくと

$$\lambda_1=(a+b)/2$$
$$\lambda_2=(a-b)/2K$$
$$\therefore \quad a=\lambda_1+K\lambda_2$$
$$b=\lambda_1-K\lambda_2$$

故に，(3−1)，(3−2) を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ は (3−3)，(3−4) から

$$f(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}+e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}-e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}}{K}$$

(λ_1, λ_2: 任意定数)

となる。これらは **2.** の解法Ｂにおける＜Ⅲ＞の解と同型である。

＜Ⅳ＞

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+K^2f(x)f(y)} \qquad \cdots\cdots\cdots(4-1)$$

とおく。

ここで，$f(x)=G(x)/F(x)$ とおくと (4−1) は

$$\frac{G(x+y)}{F(x+y)}=\frac{F(x)G(y)+G(x)F(y)}{F(x)F(y)+K^2G(x)G(y)}$$

よって

$$F(x+y)=F(x)F(y)+K^2G(x)G(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(4-2)$$

$$G(x+y)=F(x)G(y)+G(x)F(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(4-3)$$

を満たす $F(x)$, $G(x)$ を求めればよいであろう。

(4−2)，(4−3) は前に掲げた＜Ⅲ＞と同型の関数方程式になっているから。

$$F(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}+e^{(\lambda_1-K\lambda_2)x}}{2}$$

$$=\frac{e^{K\lambda_2 x}+e^{-K\lambda_2 x}}{2}\cdot e^{\lambda_1 x}$$

$$G(x)=\frac{e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}+e^{(\lambda_1+K\lambda_2)x}}{2K}$$

$$=\frac{e^{K\lambda_2 x}-e^{-K\lambda_2 x}}{2K}\cdot e^{\lambda_1 x}$$

（λ_1,　λ_2: 任意定数）

とおける。

故に,（4－1）を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{K}\cdot\frac{e^{K\lambda_2 x}-e^{-K\lambda_2 x}}{e^{K\lambda_2 x}+e^{-K\lambda_2 x}}$$

（λ_2: 任意定数）

となる。

以上により，関数方程式＜Ⅱ＞，＜Ⅲ＞，＜Ⅳ＞の解法は総て＜Ⅰ＞の解法に帰着させることができることが明らかにされた。

5. ま　と　め

a, b を任意定数とすると

＜Ⅰ＞　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ の解は

$f(x)=ax$

である。すなわち＜Ⅰ＞を満たたす解は原点を通る直線であり，＜Ⅰ＞は原点を通る一次関数の加法性を表わしている。

＜Ⅱ＞　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ の解は

$$f(x)=e^{ax}$$

となる。すなわち，$e^a=C$ とおけば，＜Ⅱ＞を満たす解は，$f(x)=C^x$ (C は正の定数）となり，＜Ⅱ＞は一般の指数関数の加法性を表わしている。

＜Ⅲ＞　$f(x+y)=f(x)f(y)+K^2g(x)g(y)$
$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$　の解は

$$f(x)=e^{bx}\cdot\frac{e^{aKx}+e^{-aKx}}{2}$$

$$g(x)=e^{bx}\cdot\frac{e^{aKx}-e^{-aKx}}{2K}$$

でなる。ここで

(i)　K が実数のとき，双曲線関数を導入すれば，$f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=e^{bx}\cdot cosh(aKx)$$

$$g(e)=e^{bx}\cdot sinh(aKx)\cdot\frac{1}{K}$$

と表示できる。特に $a=1$, $b=0$, $K=1$ のとき

$$f(x)=cosh(x)$$

$$g(x)=sinh(x)$$

となる。すなわち，$f(x)$ は双曲線余弦，$g(x)$ は双曲線正弦となり，＜Ⅲ＞は双曲線三角法における加法定理を表わしている。

(ii) Kが純虚数のとき，$K=ki$ (kは実数，では虚数単位）とおくと，$f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=e^{bx}\cdot\frac{e^{akxi}+e^{-akxi}}{2}$$

$$g(x)=e^{bx}\cdot\frac{e^{akxi}-e^{-akxi}}{2k}$$

となる。

故に，複素指数の指数関数の定義により，$f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=e^{bx}\ cos(akx)$$
$$g(x)=e^{bx}\ sin(akx)\cdot\frac{1}{k}$$

と表示できる。特に $a=1$, $b=0$, $k=1$ のとき

$$f(x)=cos\ x$$
$$g(x)=sin\ x$$

となる。すなわち，$f(x)$ は余弦関数，$g(x)$ は正弦関数となり，＜Ⅲ＞は一般の三角法における余弦に関する加法定理を表わしている。

＜Ⅳ＞　$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+K^2f(x)f(y)}$　の解は

$$f(x)=\frac{1}{K}\cdot\frac{e^{aKx}-e^{-aKx}}{e^{aKx}+e^{-aKx}}$$

となる。

(i) Kが実数のとき，双曲線関数を導入すれば，$f(x)$は

$$f(x)=\frac{1}{K}\cdot tanh(aKx)$$

と表示できる。特に $a=1$, $K=1$ のとき

$$f(x)=tanh(x)$$

となる。すなわち，$f(x)$は双曲線正接となり，＜Ⅲ＞は双曲線正接に関する加法定理を表わしている。

(ii) Kが純虚数のとき，$K=ki$ (kは実数，iは虚数単位）とおくと

$$f(x)=\frac{1}{k}\,tan(akx)$$

と表示できる。特に $a=1$, $k=1$ のとき

$$f(x)=tan\ x$$

となる。すなわち，$f(x)$は正接関数となり，＜Ⅲ＞は一般の三角法における正接に関する加法定理を表わしている。

いずれにしても，こうした試みの積み上げによって，文科系あるいは社会科学系大学の一般学生に対する数学教育へのより一層の関心を換起することができればと期待するものである。

参　考　文　献

1）佐藤良一郎：「二三の初等的な関数方程式の解き方」日本数学会誌第65巻11号。
2）彌永昌吉，他訳：「スミルノフ高等数学教程Ｉ，Ⅱ，Ⅲ」共立出版株式会社。
3）小杉　肇：「ｅの数学」恒星社厚生閣版。
4）栗田　稔：「大学教養課程解析の演習教室」現代数学社。
5）矢野健太郎：「大学演習微分方程式」裳華房。
6）矢野健太郎，他：「科学技術者のための基礎数学」裳華房。