

# 在庫管理モデルについて

飯 田 博

## 1. は じ め に

日本の伝統的意思決定の方法は、非常に直観的なもので、現在でも企業の経営者の多くは、未だに直観に基づいて意思決定をしているといわれている<sup>1)</sup>。しかし、この様な経営者も最高意思決定者として、企業経営にかかわる情報の最適利用を目指したマネジメント・インフォर्मーション・システム (MIS) の実用化、あるいは昨今のオフィス・オートメーション (OA) の実積からも明らかのように、何百何千もの変数の制約を含む複雑な状況下での意思決定のために定量的アプローチであるオペレーションズ・リサーチ (OR) の適用によって、経営効率を上げるために何ができるかについて次第に理解を深めてきている。

こうした環境の中で、いろいろな学問の専門分野に股がっている学際的色彩の強い OR 手法は、近年増々企業経営管理に必要な度を増してきている。これは OR 手法が、現状分析、未来予測を実行するにあたって大きな威力を発揮し、また最小の経費と労力で最大の効果を上げ、なおかつ分析結果が客観的で信頼のおけるものであるからに他ならない。また、最近、コンピュータの発達とあいまって、OR 手法を取り入れたソフトウェアのパッケージが数多く開発されている。その中でも特に、在庫品に対する定量的なプログラミングとコントロールの実施のために導入される在庫管理関連のソフトウェアの開発が著しい。例えば、富士通のオペレーティング・システムで動作するものから選択すれば、次の様なものがある。

①販売・仕入・在庫管理システム(オフィス・リビング社), ②金融機関向

用品在庫管理システム（オプティマムシステムズ社），③建材店販売仕入在庫管理（大分情報システム社），④統合型販売・仕入・在庫管理プログラム（エービージャパン社），⑤実戦!! 在庫管理（近畿コンピュータサービス），⑥販売仕入在庫管理「いずみ」（大分情報システム社），⑦仕入，販売，在庫処理（コンド社），⑧ DAP 在庫事務（ソフト工学研究社），⑨販売・仕入・在庫管理システム A, B（名古屋コンピュータ販売社），⑩在庫管理システム（名古屋コンピュータ販売社），⑪スモール・ビジネス在庫管理プログラム（大分情報システム社），⑫薬品在庫管理プログラム（エービージャパン社），⑬販売仕入在庫管理システム（日本マイコン販売社），⑭部品在庫管理システム（名古屋コンピュータ販売社）等。

そこで，以上のソフトウェアの評価，あるいは名企業の在庫管理システムの事例研究のために，まず，在庫管理問題を単なる経営管理の問題としてとらえるのではなく，一つの数理モデルとしての在庫管理方式を考察し，その構造を明らかにしたい。

## 2. 在庫管理方式

OR が構成する種々の分析手法の中でもとりわけ大きな部分を占めているとされる在庫管理方式には次の10通りの方式が存在する。

- (1) 発注点まで在庫量が減少したら発注を行い，在庫量が常に一定の最大在庫と安全余裕量を加味した最低在庫の間に存在するように管理する最大最小管理方式。
- (2) 予め補充のために商品を発注する時点を決定しておき，発注時期ごとに発注量を決定しておく管理方式。
- (3) 需要が既知で確定している場合に利用される統計的な方法による管理方式。

- (4) 需要がある確率分布に従っている場合に利用される確率論的な方法による管理方式。
- (5) 全期間にわたって総期待利益を最大にするように各期の最適発注量を決定するダイナミック・プログラミング (DP) を利用する管理方式。
- (6) 需要の確率分布が想定される場合に、そのモデルをモンテカルロ法でシミュレーションして最適在庫量を決定しようとする管理方式。
- (7) 需要量の時期的な変動を時系列分析することにより需要予測をしようとする管理方式。
- (8) 各期間の需要は予測できるが一定でない場合に、生産計画との関連において在庫の費用を最小化する最適在庫量を導き出すリニア・プログラミング (LP) を利用する管理方式。
- (9) 需要・供給の流れの解析により最適在庫量を決定しようとする待ち行列理論の応用による管理方式。
- (10) 自動制御機構理論の応用により、標準在庫と実際在庫との対比結果から、最適在庫を導き出すサーボ理論応用の管理方式。

しかし、実際には、これらの管理方式の複合によって在庫管理が実行される場合が多いのである。

### 3. 在庫管理問題で生じる諸費用と使用される記号

本稿では、在庫管理問題を考察するために、問屋に商品を注文し、その商品を在庫し販売することにより利益を得ている販売店を想定して、在庫管理問題にかかわる基本的費用を次の3要素とする。

- (1) 発注費用……1回の発注に伴う費用で、商品の購入費用と、発注を計画し商品が納入されるまでに要した段取費用の和。

$C_1$ : 1単位当たりの購入価格

$C_2$ : 段取費用（発注量に独立で一定値とする。）

とすると、時刻  $t$  における在庫量を  $q(t)$  単位で表すならば、1回の発注量は  $q(0)$  で表わされ、発注費用は  $C_1 q + C_2$  となる。

- (2) 保管費用……在庫品を保管するための費用で、保管のための倉庫の建設費・設備費だけでなく、保険料や金利および品質の劣化に伴う損失も考慮した費用の和である。

$C_3$ : 1単位単位時間当たりの保管費用

とする。

- (3) 品切れ損失費用……商品の需要があるにもかかわらず、その需要を満たす在庫が不足しているために失なった信用や利益の損失による費用の和である。

$C_4$ : 1単位当たりの品切れ損失費用（ただし、品切れ時間に依存する。）

とする。

次の章で、これらの費用を考慮し、数学的手法を使って定式化した種々のタイプの在庫管理モデルを紹介する。

#### 4. 最適（経済的）発注量の定式化

##### <モデルA>

このモデルは、十分長い計画期間  $T$  にわたって、時間の経過に対して連続的に需要が既知の一定速度  $a$  で生じ、発注してから実際に商品が納入されるまでの納期が0で、品切れは許されない場合で、計画期間  $T$  における総費用を最小化する最適（経済的）発注量を  $Q$  で表すと

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{C_1P}}$$

と表示される。ただし、 $P: 0 < P < 1$ , 商品1単位当たりの保管費率。

（証明） 1サイクル当たりの総費用  $e$  を、在庫量が時間とともに連続的に変

化すると考えて積分を用いて表示する。以下この考えで  $e$  を求める。

初期在庫量を  $q$  とすると

$$\begin{aligned} e &= C_1 q + C_2 + C_3 \int_0^{q/a} (q - at) dt \\ &= C_1 q + C_2 + C_3 \frac{q^2}{2a} \end{aligned}$$

$C_3 = (C_1 q + C_2)P/q$  であると考えられるから

$$e = C_1 q + C_2 + \left(C_1 + \frac{C_2}{q}\right) P \frac{q^2}{2a}$$

となる。よって計画期間  $T$  における期待総費用  $E(q)$  は、 $e$  に発注回数  $aT/q$  を掛けると

$$E(q) = \{aC_1 + aC_2 \frac{1}{q} + \frac{1}{2} (C_1 q + C_2) P\} T$$

となる。 $E(q)$  を最小化するには、 $\frac{dE(q)}{dq} = 0$   
すなわち

$$-aC_2 \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2} C_1 P = 0$$

から

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{C_1P}}$$

となる。（検証は略する。以下同様）



このときの、最適発注間隔は

$$\frac{Q}{a} = \sqrt{\frac{2C_2}{aC_1P}}$$

となる。最適発注間隔は  $Q/a$  で表示されるので、以下特に明示しない。

#### <モデルB>

このモデルは、計画期間  $T$  における総需要量  $D$  は定まっているが、各サイクルごとに需要速度が異なり、初期在庫量は一定で納期が 0 で、品切れは許されない場合で、計画期間  $T$  における最適発注量は

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_1PT}}$$

と表示される。

（証明） 計画期間  $T$  の間で分割されたサイクル数  $n$  は  $n=D/q$  であるから

$$t_i : \text{第 } i \text{ サイクルの間隔, } T = \sum_{i=1}^n t_i$$

$a_i$  : 第  $i$  サイクルの需要速度 (一定)

とすると, 計画期間  $T$  における期待総費用は

$$\begin{aligned} E(q) &= (C_1 q + C_2) \frac{D}{q} + (C_1 + \frac{C_2}{q}) P \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^{q/a_i} (q - a_i t) dt \\ &= C_1 D + C_2 D \frac{1}{q} + \frac{T}{2} (C_1 q + C_2) P \end{aligned}$$

となる。  $E(q)$  を最小化するには,  $\frac{dE(q)}{dq} = 0$   
すなわち

$$-C_2 D \frac{1}{q^2} + \frac{T}{2} C_1 P = 0$$

から

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_1 P T}}$$

となる。 ■

つまり, モデルAにおいて, 一定の需要速度  $a$  を平均需要率  $D/T$  で置き換えたモデルがモデルBである。

## &lt;モデルC&gt;

このモデルは、初期在庫量  $z_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) に対して、 $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1, x_0=1, z_n \geq x_{n-1}$ ) のときの商品 1 単位当たりの購入価格を  $C_{1i}$  ( $C_{11} > C_{12} > \dots > C_{1n}$ ) とする、つまり発注量が増加するに従って購入価格が上記の様に減少しながら  $n$  回変動すると仮定して、計画期間  $T$  における需要量を一定値  $D$  とし、納期が 0 で、品切れは許されない場合で、モデル B と同様に考えて、初期在庫量に  $z_i$  を採用したときの期待総費用  $E(z_i)$  を最小化する発注量  $Z_i$  は、 $Z_i = \sqrt{2C_2 D / C_{1i} P T}$  で与えられる。しかし、この  $Z_i$  は  $x_{i-1}$  と  $x_i$  の間に存在するかどうかは不明であるから、 $E(z_i)$  を最小化する最適発注量であるかどうか不明になる。

よって、 $z_i$  の個々の関数である期待総費用

$$E(z_i) = C_{1i} D + C_2 D \frac{1}{z_i} + \frac{T}{2} (C_{1i} z_i + C_2) P$$

ただし、 $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i, i=1, 2, \dots, n-1$

$$z_n > x_{n-1}$$

のグラフ（このグラフは、 $z_i=0, C_{1i} D + T(C_{1i} z_i + C_2) P / 2$  を漸近線、極小点が  $(\sqrt{2C_2 D / C_{1i} P T}, \sqrt{2C_{1i} C_2 D P T} + C_{1i} D + C_2 P T / 2)$  である双曲線）の変化を定義域  $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$  で調べて、極小値と端点での関数値に注意しながら、期待総費用を最小化する発注量を決定しなければならない。

## &lt;モデルD&gt;

このモデルは、1 サイクルごとの発注量は定量で、単位時間当たりの需要速度は一定値  $a$  で、発注した商品が単位時間当たりの単位ずつ補充され、品切れ



が許されない場合で、計画期間  $T$  における最適発注量は

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{(1-\frac{a}{k})C_1P}}$$

と表示される。

(証明) 1 サイクル間において、在庫量が増加する期間を  $t'$ , 減少する期間を  $t''$ , 発注量を定量  $q$  とおくと、1 サイクル当たりの費用は

$$\begin{aligned} e &= C_1 q + C_2 + (C_1 + \frac{C_2}{q})P \cdot [\int_0^{t'} (k-a)t dt + \int_0^{t''} \{t'(k-a) - ta\} dt] \\ &= C_1 q + C_2 + (C_1 + \frac{C_2}{q})P \cdot \{ \frac{(k-a)}{2} t'^2 + (k-a)t't'' - \frac{a}{2} t''^2 \} \end{aligned}$$

となる。仮定より、 $t' + t'' = q/a$ ,  $t' = q/k$ ,  $t'' = q(1/a - 1/k)$  であるから

$$e = C_1 q + C_2 + \frac{1}{2a} (1 - \frac{a}{k}) (C_1 + \frac{C_2}{q}) P q^2$$

である。よって、計画期間  $T$  における期待総費用は、 $e$  に発注回数  $T/(t' + t'')$   $= aT/q$  を掛けると

$$E(q) = \{aC_1 + aC_2 \frac{1}{q} + \frac{1}{2} (1 - \frac{a}{k}) (C_1 q + C_2) P\} T$$

となる。  $E(q)$  を最小化するには,  $\frac{dE(q)}{dq}=0$   
すなわち

$$-\frac{aC_2}{q^2} + (1 - \frac{a}{k}) C_1 P = 0$$

から

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{(1 - \frac{a}{k}) C_1 P}}$$

となる。

発注と同時に総発注量が納入される, つまり  $k \rightarrow \infty$  のとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{C_1 P}}$$

となり, モデルDはモデルAに帰着する。

<モデルE>

このモデルは, モデルAにおいて品切れを許す場合で, 計画期間  $T$  における最適発注量は

$$Q = \sqrt{2aC_2} \cdot \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4}}$$

と表示される。

(証明) 1 サイクル当たりの発注量を  $q$ , 納入直後の在庫レベルを  $q_0$  とすると, 1 サイクル当たりの総費用は

$$\begin{aligned} e &= C_1 q + C_2 + C_3 \int_0^{q_0/a} (q_0 - at) dt + C_4 \int_{q_0/a}^{q/a} (-q_0 + at) dt \\ &= C_1 q + C_2 + \frac{C_3}{2a} q_0^2 + \frac{C_4}{2a} (q - q_0)^2 \end{aligned}$$

となる。よって, 計画期間  $T$  における期待総費用  $E(q, q_0)$  は,  $e$  に発注回数  $aT/q$  を掛けると

$$E(q, q_0) = \{ aC_1 + aC_2 \frac{1}{q} + \frac{C_3}{2} \frac{q_0^2}{q} + \frac{C_4}{2} \frac{(q - q_0)^2}{q} \} T$$

となる。 $E(q, q_0)$  を最小化する  $q, q_0$  を求めるために,  $E(q, q_0)$  を  $q$  と  $q_0$  について偏微分して,  $=0$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q} &= -aC_2 \frac{1}{q^2} - \frac{C_3}{2} \frac{q_0^2}{q^2} + \frac{C_4 (q - q_0)(q + q_0)}{2q^2} = 0 \\ &\dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q_0} = \frac{C_3 q_0}{q} - \frac{C_4 (q - q_0)}{q} = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

となる。②式から  $q_0/q = C_4/(C_3 + C_4)$ 。これを①式に代入すると

$$\frac{C_3 C_4}{C_2 + C_3} q^2 = 2a C_2$$

$$\therefore Q = \sqrt{\frac{2a C_2 (C_3 + C_4)}{C_3 C_4}}$$

となる。 ■

これを②式に代入すると、納入直後の最適在庫レベル  $Q_0$  は

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2a C_2}{C_3}} \cdot \sqrt{\frac{C_4}{C_3 + C_4}}$$

となる。

$q_0 = C_4 q / (C_3 + C_4)$  なる関係式を  $e$  の式に代入すると、1 サイクル当たりの総費用は

$$e = C_1 q + C_2 + \frac{C_3}{2a} \frac{C_4}{C_3 + C_4} q^2 \quad \dots\dots\dots ③$$

となる。ここで、品切れを許さない、つまり  $C_4 \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{aligned}
 \lim_{C_4 \rightarrow \infty} e &= C_1 q + C_2 + \frac{C_3 q^2}{2a} \lim_{C_4 \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{C_3}{C_4} + 1} \\
 &= C_1 q + C_2 + \frac{C_2}{2a} q^2 \quad \dots\dots\dots ④
 \end{aligned}$$

となる。③-④を作ると

$$\begin{aligned}
 \frac{C_2}{2a} q^2 \left(1 - \frac{C_4}{C_3 + C_4}\right) &= \frac{C_2}{2a} \frac{C_3}{C_3 + C_4} q^2 > 0 \\
 (\because 0 < \frac{C_3}{C_3 + C_4} < 1)
 \end{aligned}$$

この式は、品切れを許すことによって、 $Q_0 < Q$ となるから、在庫費用の減少で、品切れによる損失がカバーされてしまうことを示している。

また、品切れを許さない、つまり  $C_4 \rightarrow \infty$  のとき  $Q = Q_0 = \sqrt{2aC_2/C_3}$  となり、モデルEはモデルAに帰着する。

#### <モデルF>

このモデルは、モデルDにおいて品切れが許される場合で、計画期間  $T_2$  における最適発注量は

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{1 - \frac{a}{k}}} \cdot \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4}}$$

と表示される。

(証明) 1 サイクル間における発注量を  $q$ , 最大在庫量を  $q_0$ , 発注時点から最大在庫量まで納入が続けられる期間を  $t'$ , 減少して在庫量が 0 になるまでの期間を  $t''$ , 品切れが生じてから再発注するまでの期間を  $t'''$ , 品切れ量が 0 になるまでの期間を  $t''''$  とすると, 1 サイクル当たりの総費用は

$$\begin{aligned} e &= C_1 q + C_2 + C_3 \left[ \int_0^{t'} t(k-a) dt + \int_0^{t''} \{t'(k-a) - at\} dt \right] \\ &\quad + C_4 \left\{ \int_0^{t'''} at dt + \int_0^{t''''} -t(k-a) dt \right\} \\ &= C_1 q + C_2 + C_3 \left\{ (k-a) \frac{t'^2}{2} + (k-a)t't'' - \frac{a}{2} t''^2 \right\} \\ &\quad + C_4 \left( \frac{a}{2} t'''^2 + \frac{k-a}{2} t''''^2 \right) \end{aligned}$$

となる。仮定より,  $t' = q_0 / (k-a)$ ,  $t'' = q/a$ ,  $t''' = \{q(1-a/k) - q_0\} / a$ ,  
 $t'''' = \{q(1-a/k) - q_0\} / (k-a)$  であるから

$$e = C_1 q + C_2 + \frac{C_3 k}{2a(k-a)} q_0^2 + \frac{C_4 k}{2a(k-a)} \{q(1-\frac{a}{k}) - q_0\}$$

である。よって, 計画期間  $T$  における期待総費用は,  $e$  に発注回数  $T/(t' + t'' + t''' + t''') = aT/q$  を掛けると

$$E(q, q_0) = \{aC_1 + aC_2 \frac{1}{q} + \frac{C_3 + C_4}{2(1-\frac{a}{k})} \frac{q_0^2}{q} + \frac{1}{2} (1-\frac{a}{k}) C_4 q - C_4 q_0\} T$$

となる。 $E(q, q_0)$  を最小化する  $q, q_0$  を求めるために,  $E(q, q_0)$  を  $q$  と  $q_0$  について偏微分して,  $=0$  とおくと

$$\frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q} = -aC_2 \frac{1}{q^2} - \frac{C_3 + C_4}{2(1 - \frac{a}{k})} \left( \frac{q_0}{q} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{k} \right) C_4 = 0$$

.....①

$$\frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q_0} = \frac{C_3 C_4}{1 - \frac{a}{k}} \frac{q_0}{q} - C_4 = 0$$

.....②

となる。②式から  $q_0/q = (1 - \frac{a}{k}) C_4 / (C_3 + C_4)$ 。  
これを①式に代入すると

$$aC_2 \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{k} \right) \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

$$\therefore Q = \sqrt{\frac{2aC_2(C_3 + C_4)}{(1 - \frac{a}{k})C_3 C_4}}$$

となる。

これを, ②式に代入すると最適最大在庫量  $Q_0$  は

$$Q_0 = \sqrt{1 - \frac{a}{k}} \cdot \sqrt{\frac{2aC_2}{C_3}} \cdot \sqrt{\frac{C_4}{C_3 + C_4}}$$

となる。

このモデルにおいて

(i)  $k \rightarrow \infty$ ,  $C_4 \rightarrow \infty$  のとき

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ c_4 \rightarrow \infty}} Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{C_3}}$$

となり、モデルFはモデルAに帰着する。

(ii)  $C_4 \rightarrow \infty$  のとき

$$\lim_{c_4 \rightarrow \infty} Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{(1 - \frac{a}{k})C_3}}$$

となり、モデルFはモデルDに帰着する。

(iii)  $k \rightarrow \infty$  のとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{C_3}} \cdot \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_4}}$$

となり、モデルFはモデルEに帰着する。

また、モデルFにおいて、 $C_4$  の他に品切れ時間とは独立な商品1単位当たりの品切れ費用を  $C_5$  とすると



$$e = C_1 q + C_2 + \frac{C_3 k}{2a(k-a)} q_0^2 + \frac{C_4 k}{2a(k-a)} \{q(1 - \frac{a}{k}) - q_0\}^2 + C_5 (q - q_0)$$

$$\begin{aligned} \therefore E(q, q_0) = & \{aC_1 + aC_2 \frac{1}{q} + \frac{C_3 + C_4}{2(1 - \frac{a}{k})} \frac{q_0^2}{q} + \\ & \frac{1}{2} (1 - \frac{a}{k}) C_4 q - C_4 q_0\} T + aC_5 T (1 - \frac{q_0}{q}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q} = -aC_2 \frac{1}{q^2} - \frac{C_3 + C_4}{2(1 - \frac{a}{k})} (\frac{q_0}{q})^2 +$$

$$\frac{1}{2} (1 - \frac{a}{k}) C_4 q + aC_5 \frac{q_0}{q^2} = 0$$

$$\frac{\partial E(q, q_0)}{\partial q_0} = \frac{C_3 C_4}{1 - \frac{a}{k}} \frac{q_0}{q} - C_4 - \frac{aC_5}{q} = 0$$

より、最適発注量は

$$Q = \sqrt{\frac{2aC_2}{1 - \frac{a}{k}} - \frac{a^2 C_5^2}{C_3 + C_4}} \cdot \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4}}$$

となる。

## &lt;モデルG&gt;

このモデルがモデルFと異なる所は、異なる  $n$  個の商品を在庫管理するという点で、他の仮定がモデルFと同じ場合、第  $i$  商品に対して

$a_i$  : 単位時間当たりの需要速度

$k_i$  : 単位時間当たりの補充速度

$C_{i1}$  : 1 単位当たりの購入価格

$C_{i2}$  : 段取費用

$C_{i3}$  : 1 単位, 単位時間当たりの保管費用

$C_{i4}$  : 1 単位当たりの品切れ損失費用 (ただし, 品切れ時間に依存するものとする。)

とすると, 第  $i$  商品の最適発注量  $Q$  は

$$Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{1 - \frac{a_i}{k_i}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i3} + C_{i4}}{C_{i3} C_{i4}}}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

と表示される。

(証明) 第  $i$  商品の 1 サイクル間における発注量を  $q_i$  単位, 最大在庫量を  $q_{0i}$  単位とすると, 計画期間  $T$  において  $n$  個の商品を在庫管理するときの期待総費用  $Eg = \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  はモデルFの場合と同様に考えると

$$Eg = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n a_i C_{i2} \frac{1}{q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}^2}{q_i} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} q_i - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i} \right\} T$$

となる。Eg を最小化する  $q_i$ ,  $q_{0i}$  を求めるために, Eg を  $q_i$ ,  $q_{0i}$  について偏微分して  $=0$  とおくと

$$\frac{\partial \text{Eg}}{\partial q_i} = -a_i C_{i2} \frac{1}{q^2} - \frac{1}{2} \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \left( \frac{q_{0i}}{q_i} \right)^2 +$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} q_i = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial \text{Eg}}{\partial q_{0i}} = \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}}{q_i} - C_{i4} = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。②式から  $q_{0i}/q_i = (1 - a_i/k_i) C_{i4} / (C_{i3} + C_{i4})$ 。これを①式に代入すると

$$a_i C_{i2} \frac{1}{q_i^2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) \frac{C_{i3} C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}} = 0$$

$$\therefore Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2} (C_{i3} + C_{i4})}{\left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i3} C_{i4}}}$$

となる。

これを, ②式に代入すると最適最大在庫量  $Q_{0i}$  は



$$Q_{0i} = \sqrt{1 - \frac{a_i}{k_i}} \cdot \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{C_{i3}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}}}$$

となる。

### <モデルH>

このモデルはモデルGにおいて  $q_i = a_i t$  とおく。つまり  $n$  種類の商品を発注間隔が  $t$  の各サイクルごとに1回ずつ発注する場合で、第  $i$  商品の最適発注量は

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^n C_{i2}}{\sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) \frac{C_{i3} C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}}}} \cdot a_i$$

となる。

(証明) 計画期間において、上記の仮定のもとで、 $n$  種類の商品を在庫管理するときの期待総費用  $E_h = \sum_{i=1}^n E(t, q_{0i})$  は、モデルGにおける  $E_g$  において  $q_i = a_i t$  と置けば求められる。

$$\therefore E_h = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n C_{i2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} q_{0i}^2 \cdot \frac{1}{t} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} \cdot t - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i} \right\} T$$

となる。 $E_h$  を最小化する  $t, q_{0i}$  を求めるために,  $E_h$  を  $t, q_{0i}$  について偏微分して,  $=0$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_h}{\partial t} = & -\sum_{i=1}^n C_{i2} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} q_{0i}^2 \cdot \frac{1}{t^2} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{\partial E_h}{\partial q_{0i}} = \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} q_{0i} \cdot \frac{1}{t} - C_{i4} = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

となる。②式から  $q_{0i}/t = a_i (1 - a_i/k_i) C_{i4} / (C_{i3} + C_{i4})$ 。これを①式に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_{i2} \cdot \frac{1}{t^2} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) \frac{C_{i3} C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}} \\ \therefore t = & \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^n C_{i2}}{\sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) \frac{C_{i3} C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}}}} \end{aligned}$$

となる。これは最適発注間隔を表わしている。故に, 第  $i$  商品の最適発注量は,  
 $Q_i = t \times a_i$  より

$$\therefore Q = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^n C_{i2}}{\sum_{i=1}^n a_i \left(1 - \frac{a_i}{k_i}\right) \frac{C_{i3} C_{i4}}{C_{i3} + C_{i4}}}} \cdot a_i$$

となる。

このモデルにおいて、 $n=1$  とするとモデルHはモデルFに帰着する。

### <モデルI>

このモデルは、モデルGにおいて保管スペースに制約のある場合で

S: 保管スペースの全スペース

$S_i$ : 第  $i$  商品 1 単位当たりの占有スペース

とすると、第  $i$  商品の最適発注量は

$$Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{1 - \frac{a_i}{k_i}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i3} + C_{i4}}{C_{i3} C_{i4} - \lambda S_i \left( \frac{C_{i4}}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} S_i \right)}}$$

と表示される。ただし、 $\lambda$  はラグランジュ (Ladrange) の未定乗数。

(証明)  $n$  種類の商品の平均使用スペースは

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i$$

である。ここで、保管スペースを最も効果的に利用するならば、制約条件は

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = S$$

である。この制約条件のもとで、モデルGにおける  $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  を最小化するために、ラグランジュの未定乗数  $\lambda$  を導入して、関数  $I = I(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}; \lambda)$  を

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n a_i C_{i2} \frac{1}{q_i} + \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}^2}{q_i} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) \cdot C_{i4} q_i - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i} \right\} T +$$

$$\lambda \left( S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i \right)$$

とおき、ラグランジュの未定乗数法により、この  $I$  を最小化する  $q_i, q_{0i}$  を求める。そこで、 $I$  を  $q_i, q_{0i}, \lambda$  について偏微分して、 $=0$  とおくと

$$\frac{\partial I}{\partial q_i} = \left\{ -a_i C_{i2} \frac{1}{q_i^2} - \frac{1}{2} \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \left( \frac{q_{0i}}{q_i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} \right\} T = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial q_{0i}} = \left( \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}}{q_i} - C_{i4} \right) T - \frac{1}{2} \lambda S_i = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

となる。②式から  $q_{0i}/q_i = (\lambda S_i/2T + C_{i4}) (1 - a_i/k_i) / (C_{i3} + C_{i4})$ 。これを①に代入すると

$$a_i C_{i2} \frac{1}{q_i^2} = \frac{C_{i3} C_{i4} - \frac{\lambda}{T} C_{i4} S_i - \frac{\lambda^2}{4T^2} S_i^2}{C_{i3} + C_{i4}} \left(1 - \frac{a_i}{k_i}\right)$$

$$\therefore Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2} (C_{i3} + C_{i4})}{\left(1 - \frac{a_i}{k_i}\right) \{C_{i4} C_{i3} - \lambda S_i \left(\frac{C_{i4}}{T} - \frac{\lambda}{4T^2} S_i\right)\}}}$$

となる。

これを、②式に代入すると最適最大在庫量は

$$Q_{0i} = \sqrt{1 - \frac{a_i}{k_i}} \cdot \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{C_{i3} - \lambda S_i \left(\frac{1}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}}\right)}} \times$$

$$\sqrt{\frac{1}{C_{i4} (C_{i3} + x_{i4})}} \cdot \left(\frac{\lambda}{2T} S_i + C_{i4}\right) \quad \dots\dots\dots ④$$

となる。

$Q_{0i}$  を③式に代入すると



$$S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_{0i} S_i = 0 \quad (3)'$$

を得る。この方程式はラグランジュの未定乗数  $\lambda$  の方程式である。

もし保管スペースを単位スペース当たり、計画期間  $T$  における保管料  $D$  で賃借できるものと仮定するならば、計画期間  $T$  における期待総費用は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i}) = & \sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n a_i C_{i2} \frac{1}{q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}^2}{q_i} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} q_i - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i} \} T + \frac{D}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i \end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})}{\partial q_{0i}} = 0$$

より

$$Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{1 - \frac{a_i}{k_i}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i3} + C_{i4}}{C_{i3} C_{i4} + DS_i \left( \frac{C_{i4}}{T} - \frac{D}{4T^2} S_i \right)}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。④式と⑤式を比較してみると、 $-\lambda$ は賃借料あるいは保管スペース  $S$  の帰属賃借料のパラメータと考えられる。だから、 $-\lambda$ が  $D$  より大であれば、さらに保管スペースを借りることが会社にとって有利となる。この  $-\lambda$  を  $S$  の影の価格あるいはシャドウ・プライス (Shadow Price) という。

次に保管スペースに対する不等式による制約条件

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(q_{0i}, S_i) \leq S$$

のもとで、 $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{i0})$  を最小化するために、クーン・タッカー (Kuhn-Tucker) の定理と同値な次の定理を導入する。

〔定理〕  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})=(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$  は  $R^n$  で全微可能な凸関数とする。領域  $D$  の境界上の点  $\mathbf{x}^\circ=(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)^T$  で  $f(\mathbf{x})$  を最小値をもつならば、等式

$$-f_x(\mathbf{x}^\circ) = \lambda g_x(\mathbf{x}^\circ) - \mu$$

ただし、 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ,  $\mu=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  において

$$x_j^\circ > 0 \text{ ならば } \mu_j = 0$$

$$g_i(\mathbf{x}^\circ) < 0 \text{ ならば } \lambda_i = 0$$

を満足するような  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$  が存在する<sup>(2)</sup>。

この定理において,  $f = -\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$ ,  $g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i - S$ ,  $x = (q_1, q_2, \dots, q_n, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ ,  $\lambda = -\lambda$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots, \mu_{2n})$  とおくと

$$-\frac{\partial \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})}{\partial q_i} = -\lambda \frac{\partial g}{\partial q_i} - \mu_i \quad \dots\dots\dots ⑥$$

$$-\frac{\partial \sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})}{\partial q_{0i}} = -\lambda \frac{\partial g}{\partial q_{0i}} - \mu_i \quad \dots\dots\dots ⑦$$

を得る。題意から  $q_i > 0$ ,  $q_{0i} > 0$ , 従って  $\mu_i = 0 (i=1, 2, \dots, 2n)$  としてよいことになる。よって⑥, ⑦から

$$-a_i C_{i2} \frac{1}{q_i^2} - \frac{1}{2} \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \left( \frac{q_{0i}}{q_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} = 0 \quad \dots\dots\dots ⑥'$$

$$\left( \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}}{q_i} - C_{i4} \right) T = \frac{1}{2} \lambda S_i \quad \dots\dots\dots ⑦'$$

となる。⑥', ⑦' から

$$q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2} (C_{i3} + C_{i4})}{(1 - \frac{a_i}{k_i}) \{ C_{i3} C_{i4} - \lambda S_i (\frac{C_{i4}}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} S_i) \}}} \quad \dots\dots\dots ⑧$$

$$q_{0i} = \sqrt{1 - \frac{a_i}{k_i}} \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{C_{i3} - \lambda S_i \left( \frac{1}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}} \right)}} \times$$

$$\sqrt{\frac{1}{C_{i4}(C_{i3} + C_{i4})}} \cdot \left( \frac{\lambda}{2T} S_i + C_{i4} \right) \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

となる。⑨式は $\lambda$ について狭義の単調増加関数であり、 $\lambda$ の2次方程式  $C_{i3} - \lambda S_i (1/T + \lambda S_i / 4T^2 C_{i4}) = 0$  の判別式は常に正であるから、 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i$  は、 $-\infty < \lambda < \infty$ において0から $\infty$ まで狭義の単調増加する。従って、 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = S$  を満たす唯一の $\lambda$ が存在する。それを $\lambda^*$ とし、対応する $q_i$ の値を $q_i^*$ 、 $q_{0i}$ の値を $q_{0i}^*$ とすると、 $\lambda^* \leq 0$ のとき $q_i^*$ 、 $q_{0i}^*$ が $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$ を最小化し、 $\lambda^* > 0$ のとき $\lambda=0$ に対応する $q_i^*$ 、 $q_{0i}^*$ が $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$ を最小化する、ことがわかる。この $q_i^*$ 、 $q_{0i}^*$ は前出の $Q_i$ 、 $Q_{0i}$ と同値である。結局、保管スペースを使い切ってしまう前出のモデルに帰着する。

さて、品切れが許されず、発注と同時に全発注量が納入される場合について考察する。

つまり、 $C_{i4} \rightarrow \infty$ 、 $k_i \rightarrow 0$ の場合

$$\lim_{\substack{C_{i4} \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} Q_i = \sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{C_{i3} - \frac{\lambda}{T} S_i}}$$

である。よって、品切れが許されず、発注と同時に全発注量が納入される場合、第 $i$ 商品1単位当たりの占有スペースを $S_i$ とすると、第 $i$ 商品の最適発注量は

$$\sqrt{\frac{2a_i C_{i2}}{C_{i3} - \frac{\lambda}{T} S_i}}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

となる。ただし、 $\lambda$ はラグランジュ未定乗数。

保管スペースによる制約条件がない、つまり  $\lambda=0$  の場合、モデル I はモデル G に帰着する。

#### <モデル J>

このモデルは、モデル I において、さらに発注に要する時間に制約を付けた場合で、第  $i$  商品に対して

$l_i$  : 1 回の発注に要する時間

とすると、第  $i$  商品の最適発注量は

$$Q_i = \sqrt{\frac{2a(C_{i2} - \mu l_i)}{1 - \frac{a_i}{k_i}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i3} + C_{i4}}{C_{i3} C_{i4} - \lambda S_i \left( \frac{C_{i4}}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}} \right)}}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

となる。ただし、 $\lambda$ ,  $\mu$ はラグランジュ未定乗数。

(証明) 計画期間  $T$  における第  $i$  商品の発注回数は  $a_i T/q_i$  であるから、計画期間中における発注に要する時間は  $a_i l_i T/q_i$  である。ここで  $L$  (使用できる発注時間) を全部利用して発注計画を実施すると仮定すると、制約条件は

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i l_i}{q_i} T = L$$

である。この制約条件とモデル I における保管スペースに関する制約条件のもとで、モデル G における  $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  を最小化するために、ラグランジュの未定乗数  $\lambda, \mu$  を導入して、関数  $J = J(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}; \lambda, \mu)$  を

$$\begin{aligned} J = & \left\{ \sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n a_i C_{i2} \frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i2} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}^2}{q_i} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} q_i - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i} \right\} T + \\ & \lambda \left( S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i \right) + \mu \left( L - \sum_{i=1}^n \frac{a_i l_i}{q_i} T \right) \end{aligned}$$

とおく。ラグランジュの未定乗数法により、この  $J$  を最小化する  $q_i, q_{0i}$  を求める。

そこで、 $J$  を  $q_i, q_{0i}, \lambda, \mu$  について偏微分して、 $=0$  とおくと

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = \left\{ -a_i (C_{i2} - \mu l_i) \frac{1}{q_i^2} - \frac{1}{2} \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \left( \frac{q_{0i}}{q_i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_i}{k_i} \right) C_{i4} \right\} T = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_{0i}} = \left( \frac{C_{i3} + C_{i4}}{1 - \frac{a_i}{k_i}} \frac{q_{0i}}{q_i} - C_{i4} \right) T - \frac{1}{2} \lambda S_i = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = L - \sum_{i=1}^n \frac{a_i l_i}{q_i} T = 0 \quad \dots\dots\dots ④$$

となる。①式と③式から

$$Q_i = \sqrt{\frac{2a_i(C_{i2} - \mu l_i)}{1 - \frac{a_i}{k_i}}} \cdot \sqrt{\frac{C_{i3} + C_{i4}}{C_{i3}C_{i4} - \lambda S_i \left( \frac{C_{i4}}{T} + \frac{\lambda S_i}{4T^2 C_{i4}} \right)}}$$

となる。 ■

これを②式に代入すると最適最大在庫量は

$$Q_{0i} = \sqrt{1 - \frac{a_i}{k_i}} \cdot \sqrt{\frac{2a_i(C_{i2} - \mu l_i)}{C_{i3} - \lambda S_i \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda S_i}{4T^2 C_{i4}} \right)}} \times$$

$$\sqrt{\frac{1}{C_{i4}(C_{i3} + C_{i4})}} \cdot \left( -\frac{\lambda}{2T} S_i + C_{i4} \right)$$

となる。

$Q_i$  を④式に,  $Q_{0i}$  を③式に代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} S - \sum_{i=1}^n Q_{0i} S_i = 0 \\ L - \sum_{i=1}^n \frac{a_i l_i}{Q_i} T = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

を得る。これらの方程式はラグランジュの未定乗数  $\lambda, \mu$  の連立方程式である。もし、⑤が実解の組 ( $\lambda^*, \mu^*$ ) をもっているとき、 $\lambda^* \leq 0, \mu^* \leq 0$  ならば、それらに対応する  $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  が最小になる。 $\lambda^* \leq 0, \mu^* > 0$  ならば、 $\lambda^*, \mu = 0$  に対応する  $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  が最小になる。 $\lambda^* > 0, \mu^* \leq 0$  ならば、 $\lambda = 0, \mu^*$  に対応する  $\sum_{i=1}^n E(q_i, q_{0i})$  が最小になる。従って  $Q_i, Q_{0i}$  の式に、 $\lambda^* \leq 0, \mu^* \leq 0$  のとき  $\lambda = \lambda^*, \mu = \mu^*$  を代入した値が最適発注量を与え、 $\lambda^* \leq 0, \mu^* > 0$  のとき  $\lambda = \lambda^*, \mu = 0$  を代入した値が最適発注量を与え、 $\lambda^* > 0, \mu^* \leq 0$  のとき  $\lambda = 0, \mu = \mu^*$  を代入した値が最適発注量を与える。

このモデルにおいて

$$\lim_{\substack{C_{i4} \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} Q_i = \sqrt{\frac{2a_i(C_{i2} - \mu l_i)}{C_{i3} - \frac{\lambda}{T} S_i}}$$

となるから、品切れが許されず、注発と同時に全発注量が納入される場合、第  $i$  商品の最適発注量は



$$Q_i = \sqrt{\frac{2a_i(C_{i2} - \mu l_i)}{C_{i3} - \frac{\lambda}{T} S_i}}$$

となる。

### <モデルK>

このモデルは、モデルHにおいて保管スペースによる制約条件と、発注間隔( $l$ )による制約条件を付加した場合で、第  $i$  商品の最適発注量は

$$Q_i = \sqrt{\frac{2(\sum_{i=1}^n C_{i2} - \mu l)}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i(1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} \{C_{i3} - \lambda S_i (\frac{1}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}})\}}{C_{i3} + C_{i4}}} \cdot a_i}$$

と表示できる。ただし、 $\lambda$ 、 $\mu$ はラグランジュの未定乗数。

(証明) 2つの制約条件

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = S$$

$$\frac{lT}{t} = L$$

のもとで、モデルHにおける  $\sum_{i=1}^n E(t, q_{0i})$  を最小化するために、ラグランジ

ユの未定乗数  $\lambda$ ,  $\mu$  を導入して, 関数  $K=K(t, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}; \lambda, \mu)$  を

$$K=\{\sum_{i=1}^n a_i C_{i1} + \sum_{i=1}^n C_{i2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} q_{0i}^2 \cdot \frac{1}{t} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} \cdot t - \sum_{i=1}^n C_{i4} q_{0i}\} T +$$

$$\lambda (S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i) + \mu (L - \frac{lT}{t})$$

とおく。ラグランジュの未定乗数法により, この  $K$  を最小化する  $t, q_{0i}$  を求める。

そこで,  $K$  を,  $t, q_{0i}, \lambda, \mu$  について偏微分して,  $=0$  とおくと

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \{(-\sum_{i=1}^n C_{i2} + \mu l) \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} \cdot q_{0i}^2 \cdot \frac{1}{t^2} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4}\} T = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_{0i}} = \{ \frac{C_{i3} + C_{i4}}{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i})} q_{0i} \cdot \frac{1}{t} - C_{i4} \} T - \frac{1}{2} \lambda S_i = 0$$

$$\dots\dots\dots ②$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} S_i = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = L - \frac{lT}{t} = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

①式と②式から

$$t = \sqrt{\frac{2(\sum_{i=1}^n C_{i2} - \mu l)}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} \{ C_{i3} - \lambda S_i (\frac{1}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}}) \}}{C_{i3} + C_{i4}}}}$$

となる。これを  $t^*$  とおくと、 $t^*$  は最適発注間隔を表している。

故に、第  $i$  商品の最適発注量は、 $t^* \times a_i$  より

$$Q_i = \sqrt{\frac{2(\sum_{i=1}^n C_{i2} - \mu l)}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) C_{i4} \{ C_{i3} - \lambda S_i (\frac{1}{T} + \frac{\lambda}{4T^2} \frac{S_i}{C_{i4}}) \}}{C_{i3} + C_{i4}}}} \cdot a_i$$

となる。

$t^*$  を②式に代入すると、最適最大在庫量は



$$Q_{0i} = \frac{a_i (1 - \frac{a_i}{k_i}) (\frac{1}{2} \frac{\lambda}{T} S_i + C_{i4})}{C_{i3} + C_{i4}} \cdot t^*$$

となる。

$Q_{0i}$  を③式に,  $t^*$ を④式に代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_{0i} - S_i = 0 \\ L - \frac{IT}{t^*} = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots ⑤$$

を得る。これらの方程式はラグランジュの未定乗数  $\lambda$ ,  $\mu$  の連立方程式である。

$\lambda$ ,  $\mu$  の最適発注量への条件は, モデル J の場合と同様に議論される。

このモデルにおいて,  $n=1$  とするとモデル K はモデル J に帰着する。

## 5. お わ り に

以上, 需要が確定的である場合の種々の在庫管理モデルにおける最適発注量の定式化について述べたが, 結局, 複数品目の商品を空間と時間の制約を付加して在庫管理する凸計画問題のモデル J と K がすべてのモデルを包含することが明らかになった。

需要が確定的である場合も含めて, その他の管理方式および事例研究については, あらためて紹介することにしたい。

## 〈注〉

- (1) 松田武彦(談)；意思決定における日本の強みと弱み，オペレーションズ・リサーチ，1986，Vol.31, No.1, p.4
- (2) 杉山昌平；「最適問題」の記法を使用

## 〈一般的参考文献〉

- (1) Efrain Turban, Jack R. Meredith; Fundamentals of Management Science, Business Publications, Inc.
- (2) Billy M. Thornton, Paul Preston; Inbroduction to Management Science, Charles E. Merrill Publishing Company.
- (3) Leon Cooper, U. Narayan Bhat, Larry J. Leblanc, Operations Research Modeles, W.B. Saunders Company.
- (4) David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, An Intro-duction to Management Science, West Publishing Company.
- (5) 小山昭雄，森岡道也；オペレーションズ・リサーチ，培風館。
- (6) 刀根薫；オペレーションズ・リサーチ読本，日本評論社。
- (7) 松田正一，洲之内治男，杉山昌平；OR のための基礎数学 1, 3, 丸善。
- (8) チャーチマン；オペレーションズ・リサーチ入門（上），紀伊國屋書店。
- (9) 大澤豊；現代経営科学の基礎，有斐閣。
- (10) 田畑吉雄；在庫管理（OR 入門），現代数学社。
- (11) 久保応助；予測と計画，講談社。